Оглавление

Динамика материальной точки

Законы Ньютона

1-й закон *(инерции)*

Если на материальную точку не действуют силы, то она находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

2-й закон *(основной закон динамики)*

Если на материальную точку действуют силы, то ее движение подчиняется уравнению

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i,$$

где m - масса точки, $\bar{a}$ - ее ускорение.

3-й закон (действия и противодействия)

Две материальные точки действуют друг на друга с равными по модулю, но противоположно направленными силами вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Системы отсчета, в которых выполняются 1-й и 2-й законы Ньютона, называются *инерциальными*.

Основные задачи динамики точки

первая (прямая): по заданному закону движения материальной точки найти действующую на нее силу;

вторая (обратная): по заданным силам, действующим на точку, и известным начальным условиям найти закон ее движения.

Дифференциальные уравнения движения точки

В проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x} = F_x, \;\; m\ddot{y} = F_y, \;\; m\ddot{z} = F_z$$

В проекциях на естественные координатные оси:

$$m\ddot{s} = F_\tau, \;\; m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n, \;\; 0 = F_b$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты точки, F_x, F_y, F_z – проекции действующей силы (равнодействующей), s – дуговая координата точки, F_τ, F_n, F_b – проекции действующей силы (равнодействующей) на естественные оси, а ρ - радиус кривизны траектории.

Относительное движение точки

Абсолютное ускорение точки при ее сложном движении есть векторная сумма относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$$

Из 2-го закона Ньютона тогда вытекает *основной закон динамики относительного движения материальной точки*:

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c$$

Здесь векторы

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e, \bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$$

называются *переносной и кориолисовой силами инерции* точки соответственно.

Динамика системы

Основные понятия

Механическая система – любая совокупность материальных точек.

Внешние силы системы $\{\overline{F}_k^{(e)}\}$ – силы воздействия на точки системы со стороны тел, не включенных в систему.

Внутренние силы системы $\{\overline{F}_k^{(i)}\}$ – силы взаимодействия между ее точками.

Свойство внутренних сил: главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю

$$\overline{R}^{(i)} = \sum \overline{F}_k^{(i)} = 0$$

$$\overline{M}_O^{(i)} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)}) = 0$$

Центром масс механической системы называется точка C, радиус-вектор которой вычисляется по формуле

$$\overline{r}_C = \frac{\sum m_k \overline{r}_k}{\sum m_k},$$

где m_k и $\bar{r}_k$ – масса и радиус-вектор точки с номером k.

Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется вектор

$$\bar{q} = m\bar{v}$$

Количеством движения механической системы называется вектор

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k$$

Количество движения системы можно представить в виде

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C,$$

где $M = \sum m_k$ – масса всей системы, а $\bar{v}_C = \dot{\bar{r}}_C$ - скорость центра масс.

Элементарным импульсом силы называется вектор

$$d\bar{S} = \bar{F}dt$$

Полным импульсом силы называется вектор

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt$$

Теорема об изменении количества движения

- для материальной точки:

$$\dot{\bar{q}} = \bar{F}, \ \ d\bar{q} = dS, \ \ \Delta\bar{q} = \bar{S}$$

- для системы:

$$\dot{\bar{Q}} = \sum \bar{F}_k^{(e)}, \ d\bar{Q} = \sum d\bar{S}_k^{(e)}, \ \ \Delta\bar{Q} = \sum \bar{S}_k^{(e)},$$

где символ (e) обозначает характеристики внешних сил.

Следствие – *теорема о движении центра масс*:

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^{(e)},$$

где $\bar{a}_C = \dot{\bar{v}}_C$ – ускорение центра масс.

Законы сохранения количества движения и движения центра масс

Если сумма внешних сил механической системы тождественно равна нулю, то векторы количества движения и скорости центра масс постоянны

$$\overline{Q} = \overline{const}$$

$$\overline{v}_C = \overline{const}$$

Если сумма проекций внешних сил механической системы на какую-либо неподвижную ось *x* тождественно равна нулю, то проекции векторов количества движения и скорости центра масс на эту ось постоянны

$$Q_x = const$$

$$v_{Cx} = const$$

Теорема об изменении кинетического момента

Кинетическим моментом материальной точки относительно центра O или оси z называется момент количества движения точки относительно центра O и оси z соответственно:

$$\bar{k}_O = \overline{mom_O}(m\bar{v}),\ \ k_z = mom_z(m\bar{v})$$

Кинетическим моментом механической системы относительно центра O или оси z называется сумма кинетических моментов материальных точек системы относительно центра O и оси z соответственно:

$$\bar{K}_O = \sum \overline{mom_O}(m_k\bar{v}_k),\ \ K_z = \sum mom_z(m_k\bar{v}_k)$$

Система отсчета, движущаяся поступательно вместе с центром масс механической системы, называется *системой Кенига*. Оси координат этой системы с началом в центре масс называются *осями Кенига*.

Кинетические моменты механической системы относительно центра масс для абсолютного и относительного движения «в осях Кенига» совпадают:

$$\bar{K}_C = \bar{K}_{Cr}$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра O

- для материальной точки:

$$\dot{\bar{k}}_O = \overline{mom_O}(\bar{F})$$

- для системы:

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum \overline{mom_O}(\bar{F}_k^{(e)})$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра масс:

$$\dot{\bar{K}}_{Cr} = \sum \overline{mom_C}(\bar{F}_k^{(e)})$$

Законы сохранения кинетического момента системы

Если сумма моментов всех внешних сил механической системы относительно неподвижного центра O тождественно равна нулю, то вектор кинетического момента системы относительно центра O постоянен

$$\bar{K}_O = \overline{const}$$

Если сумма моментов всех внешних сил механической системы относительно неподвижной оси z тождественно равна нулю, то кинетический момент системы относительно оси z постоянен

$$K_z = const$$

Уравнение движения вращающегося тела

Моментом инерции системы материальных точек (тела) относительно оси z называется скалярная величина

$$I_z = \sum m_k h_k^2,$$

где m_k – масса точки с номером k, а h_k - расстояние от нее до оси z.

Кинетический момент вращающегося вокруг оси z тела относительно оси вращения равен

$$K_z = I_z \omega,$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

Дифференциальное уравнение движения вращающегося вокруг оси z тела:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum mom_z(\overline{F}_k^{(e)}),$$

где φ – угол поворота тела.

Работа и мощность силы

Элементарной работой силы называется скалярное произведение вектора силы и вектора элементарного перемещения ее точки приложения:

$$dA = \overline{F} \bullet d\overline{r}$$

Полной работой силы на перемещении точки приложения из положения A в B называется сумма ее элементарных работ:

$$A = \int_A^B \overline{F} \bullet d\overline{r}$$

Мощностью силы называется скалярное произведение вектора силы и вектора скорости ее точки приложения:

$$N = \overline{F} \bullet \overline{v}$$

Мощность силы можно выразить через элементарную работу:

$$N = \bar{F} \bullet \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dA}{dt}$$

Т.е. мощность – скорость совершения работы силой.

Вычисление элементарной работы силы

Элементарная работа приложенной к телу силы при поступательном движении тела:

$$dA = \bar{F} \bullet d\bar{r},$$

где $d\bar{r}$ - элементарное перемещение любой точки тела.

Элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся вокруг оси z телу:

$$dA = mom_z(\bar{F}) \cdot d\varphi,$$

где $d\varphi$ - элементарный угол поворота тела.

Элементарная работа приложенной к телу силы при плоскопараллельном движении тела:

$$dA = \bar{F} \bullet d\bar{r}_A + mom_{Az}(\bar{F}) \cdot d\varphi,$$

где $d\bar{r}_A$ - элементарное перемещение произвольно выбранного полюса A, $d\varphi$ - элементарный поворот тела, а момент силы взят относительно оси Az, проходящей через полюс A перпендикулярно основной плоскости.

Вычисление элементарной работы пары сил (момента)

При поступательном движении тела элементарная работа пары сил равна нулю:

$$dA = 0$$

При вращательном движении тела элементарная работа пары:

$$dA = M_z \cdot d\varphi,$$

где M_z- проекция вектора момента пары на ось вращения, а $d\varphi$ - элементарный угол поворота тела.

При плоскопараллельном движении тела элементарная работа пары:

$$dA = M_z \cdot d\varphi,$$

где M_z- проекция вектора момента пары на ось, перпендикулярную основной плоскости, а $d\varphi$ - элементарный угол поворота тела.

Элементарная работа системы сил

Если к телу приложена система сил $\{\overline{F}_k\}$, то сумма их элементарных работ может быть найдена как

$$\sum dA_k = dA(\overline{R}) + dA(\overline{M}_A),$$

где $dA(\overline{R})$ - элементарная работа главного вектора, а $dA(\overline{M}_A)$ - элементарная работа главного момента системы сил. В качестве центра приведения может быть выбрана любая точка A, жестко связанная с телом.

Работа внутренних сил твердого тела равна нулю при любом его перемещении:

$$\sum dA^{(i)} = 0$$

Потенциальные силы

Силы, действующие на механическую систему, называются *потенциальными*, если существует такая функция координат всех точек системы $U(x_k, y_k, z_k)$, называемая *силовой функцией*, что проекции силы, действующей на точку с номером k, на координатные оси равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам:

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

Потенциальной энергией механической системы, на точки которой действуют потенциальные силы, называется значение соответствующей силовой функции, взятое с обратным знаком:

$$\Pi = -U$$

Сумма элементарных работ потенциальных сил, действующих на механическую систему, равна полному дифференциалу от силовой функции:

$$\sum dA_k = dU$$

Сумма полных работ потенциальных сил при перемещении механической системы равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы:

$$\sum A_k = U_1 - U_0$$

Примеры потенциальных сил

Силы тяжести, действующие на твердое тело (ось z направлена вертикально вверх)

Потенциальная энергия и работа сил тяжести:

$$\Pi = mgz_C,$$

$$A = mg(z_{C0} - z_{C1}),$$

где z_C - координата центра масс, а C_0 и C_1 - начальное и конечное положения центра масс.

Линейная пружина

Потенциальная энергия и работа силы упругости:

$$\Pi = c\frac{\Delta l^2}{2},$$

$$A = \frac{c}{2}(\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2),$$

где Δl - удлинение, c – *линейная жесткость* пружины, а Δl_0 и Δl_1 - начальное и конечное удлинения пружины соответственно.

Спиральная пружина

Потенциальная энергия и работа силы упругости:

$$\Pi = c\frac{\Delta\varphi^2}{2},$$

$$A = \frac{c}{2}(\Delta\varphi_0^2 - \Delta\varphi_1^2),$$

где $\Delta\varphi$ - угловая деформация, c – *угловая жесткость* пружины, а $\Delta\varphi_0$ и $\Delta\varphi_1$ - начальная и конечная угловые деформации пружины соответственно.

Кинетическая энергия

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий ее точек:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Теорема Кенига:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + T_{Cr},$$

где m – масса системы, v_C – скорость центра масс, а T_{Cr} - кинетическая энергия системы «в осях Кенига».

Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения

- поступательное движение:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- вращательное движение:

$$T = \frac{I_z\omega^2}{2},$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения z, а ω - угловая скорость вращения тела;

- плоскопараллельное движение:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2},$$

где v_C - скорость центра масс, I_{Cz} - момент инерции тела относительно оси Cz, проходящей через центр масс перпендикулярно основной плоскости, а ω - угловая скорость вращения тела.

Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии

- для материальной точки:

$$\dot{T} = N, \ dT = dA, \ \Delta T = A$$

- для системы:

$$\dot{T} = \sum N_k, \ dT = \sum dA_k, \ \Delta T = \sum A_k,$$

где N_k - мощности всех действующих на систему сил, dA_k - элементарные работы этих сил, а A_k - их полные работы.

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется *полной механической энергией* системы:

$$E = T + \Pi$$

Закон сохранения полной механической энергии

Если действующие на механическую систему силы потенциальны, то полная механическая энергия системы постоянна

$$E = T + \Pi = const$$

Системы, для которых имеет место закон сохранения полной механической энергии, называются *консервативными*.

Принцип Даламбера

Метод кинетостатики

Силой инерции материальной точки называется вектор

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}$$

Принцип Даламбера:

Если к фактическим силам, действующим на механическую систему, добавить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Метод кинетостатики, в основе которого лежит принцип Даламбера, состоит в решении задач динамики путем составления уравнений «равновесия» после добавления к фактическим силам сил инерции

- для материальной точки:

$$\overline{F} + \overline{\Phi} = 0,$$

- для механической системы:

$$\overline{R}^{(e)} + \overline{R}^{\phi} = 0, \ \ \overline{M}_O^{(e)} + \overline{M}_O^{\phi} = 0,$$

где $\overline{R}^{(e)}$, $\overline{R}^{\phi}$ - главные векторы, а $\overline{M}_O^{(e)}$, $\overline{M}_O^{\phi}$ - главные моменты внешних сил и сил инерции относительно произвольного центра O соответственно.

Главный вектор сил инерции механической системы можно выразить через количество движения:

$$\overline{R}^{\phi} = -\dot{\overline{Q}} = -m\overline{a}_C$$

А главный момент – через кинетический момент относительно неподвижного центра O или относительно центра масс C «в осях Кенига»:

$$\overline{M}_O^{\phi} = -\dot{\overline{K}}_O, \quad \overline{M}_C^{\phi} = -\dot{\overline{K}}_{Cr}$$

Главный вектор и главный момент сил инерции

При поступательном движении тела силы инерции приводятся к равнодействующей, приложенной в центре масс:

$$\overline{R}^{\phi} = -m\overline{a}_C$$

При движении тела, имеющем плоскость материальной симметрии, вращающегося вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости, силы инерции, приведенные к центру O, лежащему в плоскости материальной симметрии, сводятся к главному вектору и главному моменту:

$$\bar{R}^{\phi} = -m\bar{a}_C, \ \ \bar{M}_O^{\phi} = -I_z\bar{\varepsilon},$$

где $\bar{\varepsilon}$ - вектор углового ускорения тела.

При вращательном движении тела вокруг оси материальной симметрии Oz силы инерции, приведенные к центру O, сводятся только к главному моменту:

$$\bar{M}_O^{\phi} = -I_z\bar{\varepsilon}$$

При плоскопараллельном движении силы инерции, приведенные к центру масс, сводятся к главному вектору и главному моменту:

$$\bar{R}^{\phi} = -m\bar{a}_C, \ \ \bar{M}_C^{\phi} = -I_{Cz}\bar{\varepsilon},$$

если плоскость, проходящая через центр масс параллельно основной, является плоскостью материальной симметрии либо ось Cz является осью материальной симметрии тела.

Основы аналитической механики

Классификация связей

Механической связью называют ограничения, накладываемые на координаты и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любом её движении. *Уравнение связи* – математическая запись этих ограничений вида

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) \geq 0,$$

где $\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k$ - радиус-векторы и векторы скорости точек системы, а t – время.

Классификация связей

- *геометрическая (голономная),* не зависит от скоростей:

$$f(\bar{r}_k, t) = 0$$

- *кинематическая (неголономная),* зависит от скоростей:

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) = 0$$

- *стационарная (склерономная)* – не зависит от времени:

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k) = 0$$

- *нестационарная (реономная),* зависит от времени:

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) = 0$$

- *неосвобождающая (удерживающая),* равенство:

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) = 0$$

- *освобождающая (неудерживающая),* неравенство:

$$f(\bar{r}_k, \dot{\bar{r}}_k, t) \geq 0$$

В дальнейшем ограничимся системами с геометрическими, стационарными, неосвобождающими связями.

Обобщенные координаты

Независимые между собой геометрические параметры, полностью задающие положение механической системы в пространстве, называются *обобщенными координатами*:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

Количество обобщенных координат называют *числом степеней свободы* системы (*ЧСС*):

$$ЧСС = n$$

Любая совокупность элементарных перемещений точек системы, допускаемых наложенными связями, называется *возможным перемещением* системы: $\{\delta\bar{r}_k\}$.

В случае стационарных связей действительное перемещение $\{d\bar{r}_k\}$ точек системы всегда является одним из возможных.

Элементарным перемещениям точек системы соответствуют элементарные приращения обобщенных координат

- возможное перемещение: $\{\delta q_i\}$

- действительное перемещение: $\{dq_i\}$

Возможная работа. Обобщенные силы

Элементарная работа силы на возможном перемещении точки приложения называется *возможной работой* силы:

$$\delta A = \bar{F} \bullet \delta\bar{r}$$

Связи, сумма возможных работ реакций которых равна нулю на любом возможном перемещении точек системы, называются *идеальными*:

$$\sum \delta A(\overline{N}_k) = 0$$

Ограничимся системами с идеальными связями.

Обобщенной силой Q_i , соответствующей обобщенной координате q_i , называется коэффициент при приращении δq_i в выражении для суммы возможных работ всех активных сил, действующих на систему:

$$\sum \delta A(\overline{F}_k) = \sum Q_i \cdot \delta q_i$$

В случае потенциальных сил, действующих на механическую систему, обобщенные силы можно находить с помощью потенциальной энергии системы, выраженной через обобщенные координаты, по формуле:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

Принцип возможных перемещений. Условия равновесия в обобщенных координатах

Принцип возможных перемещений

Для равновесия механической системы с геометрическими, стационарными, неосвобождающими, идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил была равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A(\overline{F}_k) = 0$$

Условия равновесия в обобщенных координатах

Для равновесия механической системы с геометрическими, стационарными, неосвобождающими, идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю:

$$Q_1 = 0,\ \ Q_2 = 0,\ \ldots,\ \ Q_n = 0$$

Условия равновесия в обобщенных координатах в случае действия потенциальных сил:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0$$

Т.е. положениям равновесия в этом случае соответствуют стационарные точки потенциальной энергии.

Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа II рода

Общее уравнение динамики

При движении механической системы с геометрическими, неосвобождающими, идеальными связями в каждый момент времени сумма возможных работ всех активных сил и сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A(\overline{F}_k) + \sum \delta A(\overline{\Phi}_k) = 0$$

Уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i, \quad i = 1,2\ldots,n$$

Здесь T – кинетическая энергия механической системы, выраженная через обобщенные координаты q_i и скорости $\dot{q}_i$, Q_i - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате с номером i, n – число степеней свободы системы.

Малые колебания

Устойчивое положение равновесия

Положение равновесия $\{q_i = 0\}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если при $t = 0$ начальные обобщенные координаты и скорости удовлетворяют ограничениям

$$|q_{i0}| < \delta, \ |\dot{q}_{i0}| < \delta,$$

то во все последующие моменты отклонения от положения равновесия не превышают ε :

$$|q_i| < \varepsilon$$

Теорема Лагранжа-Дирихле:

Если в некотором положении консервативной механической системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это – положение устойчивого равновесия.

Свободные малые колебания

Приближенные формулы для кинетической и потенциальной энергий систем с одной степенью свободы с учетом малости движений вблизи устойчивого положения равновесия:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{cq^2}{2},$$

где a и c – положительные константы, называемые обобщенными коэффициентами инерции и жесткости соответственно, q – обобщенная координата.

Дифференциальное уравнение свободных малых колебаний:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad k^2 = \frac{c}{a}$$

Общее решение этого уравнения:

$$q = A\sin(kt + \alpha),$$

где A *и* α - константы интегрирования.

Малые колебания с учетом сопротивления

Сила сопротивления, действующая на точку с номером k:

$$\bar{R}_k = -\mu_k \bar{v}_k,$$

где $\bar{v}_k$ – вектор скорости, а μ_k - коэффициент сопротивления.

Диссипативная функция (функция Рэлея):

$$\Phi = \sum \frac{\mu_k v_k^2}{2}$$

Обобщенная сила сопротивления:

$$Q^R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

Следствие из теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi,$$

где $E = T + \Pi$ – полная механическая энергия системы.

Приближенная формула для диссипативной функции с учетом малости движений вблизи положения равновесия:

$$\Phi = \frac{b\dot{q}^2}{2},$$

где b – положительная константа, называемая обобщенным коэффициентом сопротивления.

Дифференциальное уравнение свободных малых колебаний с учетом сил сопротивления:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \quad n = \frac{b}{2a}$$

Общее решение этого уравнения

- при $n < k$ (малое сопротивление):

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha),$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

где A и α - константы интегрирования

- при $n > k$ (большое сопротивление):

$$q = C_1 e^{-(n+r)t} + C_2 e^{-(n-r)t},$$

$$r = \sqrt{n^2 - k^2}$$

- при $n = k$:

$$q = e^{-nt}(C_1 + C_2 t),$$

где C_1 и C_2 - константы интегрирования.

Вынужденные колебания

Вынуждающая сила, действующая на точку с номером k:

$$\overline{F}_k = \overline{H}_k \sin(pt + \beta),$$

где $\overline{H}_k = \overline{const}$, а p и β - частота и начальная фаза вынуждающих сил.

Обобщенная вынуждающая сила:

$$Q = H \sin(pt + \beta),$$

где H - амплитуда обобщенной силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{q} + k^2 q = h\sin(pt+\beta), \;\; h = \frac{H}{a}$$

Общее решение этого уравнения при $p \neq k$:

$$q = A\sin(kt+\alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\beta),$$

где A и α - константы интегрирования.

Удар

Явление, при котором скорости точек системы за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени изменяются на конечную величину, называется *ударом*.

Теорема *об изменении количества движения системы при ударе*:

$$\Delta\overline{Q} = \sum \overline{S}_k^{(e)},$$

где $\overline{S}_k^{(e)}$ - внешние ударные импульсы.

Отношение нормальных составляющих скоростей тела после и до удара о неподвижную преграду называется *коэффициентом восстановления*:

$$k = u_n / v_n$$

При *прямом центральном соударении* двух тел коэффициентом восстановления называется отношение относительных скоростей тел после и до удара:

$$k = \left| \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} \right|$$

Опытным путем коэффициент восстановления можно определить по формуле:

$$k = \sqrt{h / H},$$

где H и h – высота падения и последующего за ним подъема тела при его прямом падении на горизонтальную плоскость.