# ПРОГРАММА
# вступительного экзамена в магистратуру по направлению 01.04.04 – «Прикладная математика», программа 01.04.04.01 «Математическое моделирование в нефтегазовой отрасли»

## 1. Требования к вступительному испытанию

На вступительном испытании поступающий в магистратуру должен подтвердить знания в области общих профессиональных и специальных дисциплин направления 01.03.04 «Прикладная математика» (квалификация «бакалавр»), достаточных для обучения по магистерской программе.

Поступающий должен иметь сформированное научное мировоззрение и продемонстрировать на вступительном испытании знание и владение системой научных понятий; фактами научных теорий; методами и процедурами профессиональной деятельности. Критерии выставления оценок на вступительном испытании представлены в таблице 1.

Таблица 1

| Оценка | Критерий выставления оценок |
|---|---|
| 50 баллов и менее | а) абитуриент изложил менее 25% материала, требуемого государственным образовательным стандартом подготовки бакалавра;<br>б) абитуриент продемонстрировал низкий уровень глубины изложения материала по направлению. |
| 51-69 баллов | а) абитуриент изложил от 50% до 70% материала, требуемого государственным образовательным стандартом подготовки бакалавра по направлению;<br>б) абитуриент продемонстрировал уровень глубины изложения материала по направлению выше среднего. |
| 70-84 баллов | а) абитуриент изложил от 70% до 85% материала, требуемого государственным образовательным стандартом подготовки бакалавра по направлению;<br>б) абитуриент продемонстрировал достаточно высокий уровень владения материалом по направлению. |
| 85-100 баллов | а) абитуриент изложил от 85% до 100% материала, требуемого государственным образовательным стандартом подготовки бакалавра по направлению;<br>б) абитуриент продемонстрировал владение материалом, как по полноте, так и по глубине полностью соответствующим требованиям государственного образовательного стандарта подготовки бакалавра по направлению |

## 2. Регламент проведения вступительных испытаний

Вступительные испытания проводятся в устно-письменной форме. На подготовку выделяется два академических часа. Билет вступительных испытаний содержит шесть вопросов и задач. Примеры билетов приведены ниже.

## 3. Перечень основных учебных дисциплин, выносимых на вступительный экзамен

Математический анализ.
Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
Дифференциальные уравнения.
Теория вероятностей.
Уравнения математической физики.
Методы оптимизации.
Математическое моделирование.
Численные методы.
Программные и аппаратные средства информатики.

Программирование на ЭВМ. Базы данных.

## 4. Вопросы к экзамену для поступления в магистратуру

1. Основные понятия математического анализа функции одной переменной: пределы, дифференцируемость, исследование функций.
2. Формула Тейлора для функций одной переменной.
3. Основы интегрального исчисления для функций одной переменной.
4. Числовые ряды и признаки их сходимости.
5. Функциональные и степенные ряды. Область и радиус сходимости.
6. Функции многих переменных, пределы, частные производные, дифференцируемость.
7. Кратные и криволинейные интегралы.
8. Формула Грина.
9. Основные понятия линейной алгебры. Линейные пространства, линейная зависимость, базис, размерность.
10. Матрицы и линейные операторы.
11. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов (метод Лагранжа).
12. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора и алгоритм их вычисления.
13. Основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.
14. Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и их решение.
15. Решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Устойчивость по Ляпунову. Примеры.
17. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.
18. Постановка и решение задачи о колебаниях конечной струны. Метод Фурье.
19. Постановка и решение задачи о распространении тепла в стержне.
20. Алгебра логики. Таблицы истинности для основных логических операций.
21. Экстремумы функций нескольких переменных.
22. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
23. Постановка задачи линейного программирования.
24. Основные понятия теории вероятностей. Случайные величины, функции и плотности распределения.
25. Закон больших чисел.
26. Центральная предельная теорема.
27. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
28. Приближенные методы решения нелинейных уравнений.
29. Численные методы решения задачи Коши для ОДУ.
30. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость.
31. Численные методы решения уравнений в частных производных.
32. Базы данных и их типы.
33. Языки программирования и их сравнительная характеристика.
34. Основы объектно-ориентированного программирования.
35. Технология параллельного программирования OpenMP.

## 5. Рекомендованная литература


1. Рыков В. В., Иткин В. Ю. Математическая статистика и планирование эксперимента: учеб. пособие / - М. : МАКС Пресс, 2010. - 305 с., 19,25 п. л.: ил. - (Прикладная математика в инженерном деле). - ISBN 978-5-317-03356-9: 500 экз.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. – изд. 4-е, исправленное. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 352 с.

3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – изд. 3-е, исправленное. – М.: КомКнига, 2010. – 240 с.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. В 2 частях. Части 1, 2. - изд. 3-е, переработанное и дополненное. – М.: ТК Велби, Проспект, 2007. – 672 с.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - изд. 12-е, исправленное. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – изд. 8-е, стереотипное. – М.: Наука, 2007. – 798 с.
7. Лафоре Р. Объектно-ориентированное программирование в C++ – Москва. Санкт-Петербург: ПИТЕР, 2010. - 923 с.
8. Мартынов Н.Н. Программирование для Windows на C/C++. Том 1. – Москва: издательство БИНОМ, 2008. - 528 с.
9. Арсеньев-Образцов С.С., Жукова Т.М. Компьютерное моделирование. Введение в систему компьютерной алгебры MATLAB, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина,.- М., 2013 – 86 с.
10. Оре; О., Теория графов, - 2-е изд. - М.: Либроком, 2009 - 352 с.
11. Федунец Н.И. Методы оптимизации. Учебное пособие для Вузов, – Москва. – МГГУ, 2009. -376 с.
12. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.:Изд.5. 2009.
13. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов - М.: Высшая школа. - 2009. - 840 с.

## 6. Примеры билетов на вступительных испытаниях в магистратуру

**Билет № 1**

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.
2. Формула Тейлора для функций одной переменной. Примеры.
3. Исследование на экстремум функций одной переменной. Из всех прямоугольников данной площади $S$ определить тот, периметр которого наименьший.
4. Вычислить интеграл $\int x\sin 2x dx$.
5. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение $xy' - y = x\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.
6. . Технология параллельного программирования OpenMP.

**Билет № 2**

1. Найти $y^{(6)}$, если $y = x\sin 2x$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.
3. Формула Грина. Применяя формулу Грина вычислить криволинейный интеграл $I = \oint (x+y)^2dx - (x^2+y^2)dy$, где $K$ – пробегаемый в положительном направлении контур треугольника $ABC$ с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$.
4. Проверить найденный результат, вычислив интеграл непосредственно.
5. Построить таблицу истинности высказывания $((A\to B)\wedge A)\leftrightarrow B$.
6. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость.

**Билет № 3**

1. Найти область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$.
2. С помощью формулы трапеций вычислить интеграл и оценить погрешность: $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x},\ n=6$.
3. Решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
4. Найти все положения равновесия системы уравнений $\begin{cases}\dot{x}=\ln(-x+y^2),\\ \dot{y}=x-y-1\end{cases}$ и исследовать их на устойчивость.
5. Найти вероятность, что наудачу выбранное двузначное число окажется кратным: а) 2 или 5, б) 2 и 5.
6. Базы данных и их типы.

### 7. Примеры экзаменационных задач

1. Вычислить пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{tg3x},\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$ .

2. Найти производные функций: $y=x^x\cdot 3^{\sqrt{x}},\ y=(\sin x)^{\cos x}$.

3. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{x^3}{x^2-4},\ y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}},\ y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4. Найти градиент функции $f(x,y,z)$ в точке $M$ :
$u=x+\ln(y^2+z^2),\ M=(2,1,1),\ u=\sin(x+2y)-\sqrt{xyz},\ M=(\pi/2,3\pi/2,3)$.

5. Найти производные функции заданной неявно: $x^y=y^x,\ \sin(xy)=e^{x-y}$.

6. Исследовать на экстремум функции нескольких переменных:
$z=x^3+y^3-x^2-2xy-y^2,\ z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\ (x>0,y>0)$.

7. Найти точки условного экстремума следующих функций: $z=xy$, если $x+y=1$;
$z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, если $x^2+y^2=1$; $z=x^2+y^2$, если $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

8. Найти неопределенные интегралы: $\int\dfrac{dx}{x\ln^3 x},\ \int x^2e^{-x}dx,\ \int x\ln x dx$.

9. Вычислить криволинейный интеграл первого рода: а) $\int\limits_L y^2 dl$, где $L$ –часть кривой

$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ (0 \le t \le 2\pi),$ (арка циклоиды); б) $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl,$ где $L$ –часть кривой $x = \cos t,\ y = \sin t, z = 2t\ (0 \le t \le 2\pi),$ (часть винтовой линии).

10. Вычислить криволинейный интеграл второго рода: а) $\int\limits_L ydx - x^2dy,$ где $L$ – часть параболы $y = x^2,\ -1 \le x \le 1;$ б) $\int\limits_L y^2dx + xydy,$ где $L$ – часть окружности $x = \cos t, y = \sin t,$ $0 \le t \le \pi / 4.$

11. Исследовать сходимость числовых рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 0;$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$

12. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n} + 1)^{x+3}};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x^2 - 6x + 10)^n};$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^{x^2+4x} + 3}.$

13. Вычислить двойные интегралы по областям $D$, ограниченным линиями:
$\iint\limits_D (2x - y)dxdy,\ y = x^2, y = \sqrt{x};$ $\iint\limits_D (x - y)dxdy,\ y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$

14. Вычислить криволинейный интеграл непосредственно и помощью формулы Грина:
$\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx,$ где $C$ – окружность $x^2 + y^2 = a^2.$

15. Найти размерность и базис линейного пространства решений систем уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 27x_4 - 3x_5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 \qquad - 4x_4 = 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

16. Вычислить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A: Ў^3 \to Ў^3$, заданного в некотором базисе матрицей: 1. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

17. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

однородное: $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x};$ $y' = \frac{y}{x} - 1;$

в полных дифференциалах:

$$(x+y)dx+(x+2y)dy=0; \quad (2x+5y)dx+(5x+3y^2)dy=0;$$

линейное, первого порядка: $xy'+y-e^x=0,\ y(0)=1;\ y'-y\cdot tgx=\dfrac{1}{\cos x},\ y(0)=0.$

18. Решить дифференциальное уравнение второго порядка (найти общее решение):

однородное $y''-5y'+4y=0;$

неоднородное $y''-3y'+2y=4x^2-\cos x.$

19. Решить систему дифференциальных уравнений: $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=3x+4y\end{cases}$; $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=y-4x\end{cases}$.

20. Найти положения равновесия системы дифференциальных уравнений и исследовать их устойчивость: $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\sin(x+y)\end{cases}$; $\begin{cases}\dot{x}=(x-1)(y-1),\\ \dot{y}=xy-2.\end{cases}$

21. Определить тип уравнения в частных производных:

1. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+7u_y-3u=0;$ 2. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-3u_x+2u_y-5u=0.$

22. Решить уравнение в частных производных:

найти общее решение гиперболического уравнения $u_{xx}+2u_{xy}-5u_{yy}=0;$

найти общее решение параболического уравнения $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}+u_x-2u_y=0;$

найти общее решение гиперболического уравнения $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}=0.$

23. Найти вероятность указанного случайного события:

- в урне находится 12 шаров: 8 белых и 4 красных. Какова вероятность того, что выбранные наугад два шара будут одного цвета?
- экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинаковы и равны 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит: а) на все вопросы; б) по крайней мере, на два вопроса.
- найти вероятность наступления события $A$ ровно 3 раза в 5 независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 1/3.

24. В урне лежат 4 белых и 3 черных шара. Наудачу из урны извлекают 3 шара. Случайная величина $\xi$ представляет собой число извлеченных при этом белых шаров. Найти: а) закон распределения случайной величины $\xi$; б) вероятность события $A=\{\xi\ge 2\}$; в) математическое ожидание $M\xi$ случайной величины $\xi$.

(a) Задана плотность вероятности случайной величины $\xi$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Cx, & 0<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}.$$

Найти: а) коэффициент $C$; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность $P\{\xi>1\}$; г) вероятность $P\{0{,}5<\xi<3\}$; д) математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и медиану $Me$; е) построить графики плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$.

(b) Случайная величина ξ имеет математическое ожидание 3 и дисперсию 12. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины 3ξ + 7.

25. Постройте таблицы истинности и объясните смысл следующих высказываний:

(a) $(p \to q) \wedge (q \to p)$;

(b) $(p \to q) \to p$;

(c) $q \to (q \vee p)$;

(d) $(p \to q) \leftrightarrow (:\ \ p \vee q)$.