

Министерство образования и науки Российской Федерации
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА им. И.М.ГУБКИНА

И.В.ЕГОРОВА

Методические указания к лабораторным работам
по курсу «МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И
СЕРТИФИКАЦИЯ»

МОСКВА 2011

Лабораторная работа №1

Качество средств и результатов измерений принято характеризовать, указывая их погрешности. Понятие «погрешность» – одно из центральных в метрологии, где используются понятия «погрешность результата измерения» и «погрешность средства измерения». Погрешность результата измерения – это разница между результатом измерения X и истинным (или действительным) значением Q измеряемой величины:

$$\Delta = X - Q \quad (1)$$

Она указывает границы неопределенности значения измеряемой величины. Погрешность средства измерения – разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Она характеризует точность результатов измерений, проводимых данным средством.

Эти два понятия классифицируются по одинаковым признакам, так как во многом близки друг другу.

По характеру проявления. Погрешности делятся на случайные, систематические, прогрессирующие и грубые (промахи).

Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений одного и того же размера физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью в одних и тех же условиях. Такие погрешности обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Случайные погрешности всегда присутствуют в результате измерения. Они неустранимы и неизбежны.

Случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений, однако, их можно существенно уменьшить при увеличении числа наблюдений. Для того чтобы получить результат, минимально отличающийся от истинного значения, необходимо провести многократные измерения требуемой величины с последующей математической обработкой экспериментальных данных.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины. Систематические погрешности могут быть предсказаны, обнаружены и благодаря этому почти полностью устранены введением соответствующей поправки.

Прогрессирующая (дрейфовая) погрешность – это непредсказуемая погрешность, медленно меняющаяся во времени. Они могут быть скорректированы поправками только в данный момент времени. Так как изменения прогрессирующих погрешностей во времени – нестационарный случайный процесс, то в рамках теории стационарных случайных процессов они могут быть описаны лишь с известными оговорками.

По способу выражения различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности.

Абсолютная погрешность описывается формулой (1) и выражается в единицах измеряемой величины. Она не может в полной мере служить показателем точности измерений, так как одно и то же ее значение, например $\Delta=0,05$ В при $X=200$ В соответствует достаточно высокой точности измерений, а при $X=2$ В – низкой. Поэтому вводится понятие относительной погрешности.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta = \Delta/Q = (X-Q)/Q \quad (2)$$

Эта характеристика точности результата измерения не годится для нормирования погрешности средств измерения, так как при изменении значений Q принимает различные значения вплоть до бесконечности при $Q = 0$. В связи с этим для указания и нормирования погрешности средств измерения используется еще одна разновидность погрешности – приведенная.

Приведенная погрешность – это относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерения отнесена к условно принятому значению Q_N , постоянному во всем диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \Delta/ Q_N = (X-Q)/ Q_N \quad (3)$$

Условно значение Q_N называют нормирующим. Чаще всего за него принимают верхний предел измерений данного средства измерений, применительно к которым и используется главным образом понятие «приведенная погрешность».

В зависимости от места возникновения различают инструментальные, методические и субъективные погрешности.

Инструментальная погрешность обусловлена погрешностью применяемого средства измерения. Иногда эту погрешность называют аппаратной.

Методическая погрешность измерения обусловлена:

- отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойство, которое определяется путем измерения;

- влиянием способов применения средств измерения. Это имеет место, например, при измерении напряжения вольтметром с конечным значением внутреннего сопротивления. В данном случае вольтметр шунтирует участок цепи, на котором измеряется напряжение, и оно оказывается меньше, чем было до присоединения вольтметра;

- влиянием алгоритмов (формул), по которым производятся вычисления результатов измерений;

- влиянием других факторов, не связанных со свойствами используемых средств измерения.

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они не могут быть указаны в нормативно-технической документации на используемое средство измерений, поскольку от него не зависят, а должны определяться оператором в каждом конкретном случае. В связи с этим оператор должен четко различать фактически измеряемую им величину и величину, подлежащую измерению.

Субъективная (личная) погрешность измерения обусловлена погрешностью отсчета оператором показаний по шкалам средств измерения, диаграммам регистрирующих приборов.

По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой величины различают погрешности:

- аддитивные, не зависящие от измеряемой величины;

- мультипликативные, которые прямо пропорциональны измеряемой величине;

- нелинейные, имеющие нелинейную зависимость от измеряемой величины.

По влиянию внешних условий различают основную и дополнительную погрешности средств измерений. Основной называется погрешность средств измерений, определяемая в нормальных условиях его применения. Для каждого средства измерений в нормативно-технических документах оговариваются условия эксплуатации – совокупность влияющих величин (температура окружающей среды, влажность, давление, напряжение и частота питающей сети и др.), при которых нормируется его погрешность.

Дополнительной называется погрешность средств измерений, возникающая вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин.

В зависимости от влияния характера изменения измеряемых величин погрешности средств измерений делятся на статические и динамические. Статическая погрешность – это погрешность средств измерений применяемого для измерения физической величины, принимаемой за неизменную. Динамической называется погрешность средств измерений, возникающая дополнительно при измерении переменной физической величины и обусловленная несоответствием его реакции на скорость (частоту) изменения измеряемого сигнала.

Класс точности – это обобщенная характеристика средства измерения, выражаемая пределами допустимых значений его основной и дополнительной погрешности, а также другими характеристиками, влияющими на точность. Класс точности не является непосредственной оценкой точности измерений, выполняемых этим средством измерения. Класс точности лишь позволяет судить о том, в каких пределах находится погрешность средства измерения данного типа.

Классы точности средств измерения устанавливаются в стандартах или технических условиях. Средство измерений может иметь два и более класса точности. Например, при наличии у него двух или более диапазонов измерений одной и той же физической величины ему можно присваивать два или более класса точности. Приборы, предназначенные для измерения нескольких физических величин, также могут иметь различные классы точности для каждой измеряемой величины.

Пределы допускаемых основной и дополнительной погрешности выражаются в форме приведенных, относительных или абсолютных погрешностей. Для обозначения класса точности, установленного в виде абсолютной погрешности, используются прописные буквы латинского алфавита или римские цифры, причем меньшие пределы погрешностей должны соответствовать буквам, находящимся ближе к началу алфавита или меньшим цифрам.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности определяется по формуле $\gamma = \Delta / x_N = \pm p$, где x_N – нормирующее значение, выраженное в тех же единицах, что и Δ ; p – отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда значений: (1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6)·10ⁿ; n = 1; 0; -1; -2; ...

Нормирующее значение x_N устанавливается равным большему из пределов измерений (или модулей) для средств измерений с равномерной, практически равномерной или степенной шкалами и для измерительных преобразователей, если нулевое значение выходного сигнала находится на краю или вне диапазона измерений.

Для средств измерений, шкала которых имеет условный нуль, x_N равно модулю разности пределов измерений. Для приборов с существенно неравномерной шкалой x_N принимают равным всей длине шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерений.

В этом случае пределы абсолютной погрешности выражают, как и длину шкалы, в единицах длины, а на средстве измерений класс точности условно обозначают, например, в виде значка 3, где 0,5 – значение числа p . В остальных рассмотренных случаях класс точности обозначают конкретным числом p , например, 1,5.

Пределы допускаемой относительной основной погрешности определяются по формуле $\delta = \Delta/x = \pm q$, если $\Delta = \pm a$. Значение постоянного числа q устанавливается так же, как и значение числа p . Класс точности на приборе обозначается в виде \aleph , где 1 – конкретное значение q .

Порядок проведения лабораторной работы

1. Для выполнения лабораторной работы необходимо иметь следующие приборы:

- источник напряжения или генератор синусоидального напряжения;
- цифровой (образцовый) измерительный прибор.

2. Перед проведением работы необходимо подготовить таблицы (по образцу, приведенному ниже).

3. Собрать схему для проведения измерений. Установить ручку изменения напряжения «грубо» в крайнее положение, повернув ее против часовой стрелки.

4. Провести измерения в следующей последовательности:

- установить минимальное значение напряжения на шкале источника напряжения (0,2 в) или генератора, в графу 2 таблицы записать значение минимальное значение шкалы источника напряжения или генератора;

- по образцовому прибору определить истинное значение измеряемой величины, записать показание в графу 3 таблицы;

- установить следующее значение напряжения на шкале источника напряжения (например, 0,4 в), записать это значение в графу 2 таблицы;

- по образцовому прибору определить истинное значение измеряемой величины, записать показание в графу 3 таблицы;

- аналогичным образом провести измерения по всем делениям шкалы, шаг изменения напряжения задается преподавателем;

- после достижения максимального значения шкалы поверяемого прибора уменьшают измеряемую величину, последовательно, устанавливая те же значения, которые были выбраны при движении вверх, при этом показания образцового прибора заносят в графу 4 таблицы.

5. Ручкой «грубо» установить на источнике напряжения значение 3,0 в. Повторить п.4.

6. Расчет и заполнение остальных граф таблицы проводится на компьютере по формулам, приведенным в теоретической части работы. По результатам расчета строятся графики зависимости абсолютной и относительной погрешности от измеряемой величины и определяется класс точности поверяемого прибора. Класс точности определяется для каждого диапазона.

7. Для каждого диапазона определяем значение $\bar{\Delta}_{\text{ср}}$. Из полученных значений $\Delta_{\text{ср}}$ (столбик 7) вычитаем значение $\bar{\Delta}_{\text{ср}}$ и рассчитываем новые значения δ^* и γ^* . Строим графики зависимости абсолютной и относительной погрешности от измеряемой величины и определяем уточненный класс точности.

Таблица

№ пп	X	Q ход вверх	Δ ход вверх	Q ход вниз	Δ ход вниз	$\Delta_{\text{ср}}$	$Q_{\text{ср}}$	δ	γ	Класс точнос ти
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.										
.										

Лабораторная работа №2

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение. Исходной информацией для обработки является ряд из n ($n > 4$) результатов измерений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, из которых исключены известные систематические погрешности, - выборка. Число n зависит как от требований к точности получаемого результата, так и от реальной возможности выполнять повторные измерения.

Последовательность обработки результатов прямых многократных измерений состоит из ряда этапов.

1. Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений
2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений.
3. Определение доверительных границ случайной погрешности.
4. Определение границ неисклученной систематической погрешности θ результата измерений.
5. Определение доверительных границ погрешности результата измерений Δ_p .
6. Запись результата измерений.

Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений. На этом этапе определяются:

- среднее арифметическое значение \bar{x} измеряемой величины;
- СКО результата измерения S_x ;

- СКО среднего арифметического значения $S_{\bar{x}}$.

Среднее арифметическое значение \bar{x} определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) определяется по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

Оценка СКО среднего арифметического значения определяется по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

После проведенных расчетов исключаются грубые погрешности и промахи. Грубая погрешность или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью q (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов. Ниже рассмотрим различные методы избавления от грубых погрешностей и промахов.

Критерий «трех сигм» применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью $q \leq 0,003$, маловероятен и его можно считать промахом, если $|\bar{x} - x_i| > 3 S_x$, где S_x – оценка СКО измерений. Величины \bar{x} и S_x вычисляются без учета экстремальных значений x_i . Данный критерий надежен при числе измерений $n \geq 20 \dots 50$. Это правило обычно считается

слишком жестким, поэтому рекомендуется назначать границу цензурирования в зависимости от объема выборки: при $6 < n \leq 100$ она равна $4 S_x$; при $100 < n \leq 1000$ – $4,5 S_x$; при $1000 < n \leq 10000$ – $5 S_x$.

Критерий Романовского применяется, если число измерений $n < 20$. При этом вычисляется отношение $|(\bar{x} - x_i)/S_x| = \beta$ и сравнивается с критерием β_T , выбранным по таблице 1. Если $\beta \geq \beta_T$, то результат x_i считается промахом и отбрасывается.

Таблица 1

q	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=15	n=20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Критерий Шарлье используется, если число наблюдений в ряду велико ($n > 20$). Тогда по теореме Бернулли число результатов, превышающих по абсолютному значению среднее арифметическое значение на величину $K_{ш} S_x$, будет $n[1 - \Phi(K_{ш})]$, где $\Phi(K_{ш})$ – значение нормированной функции Лапласа для $X = K_{ш}$. Если сомнительным в ряду результатов наблюдений является один результат, то $n[1 - \Phi(K_{ш})] = 1$. Отсюда $\Phi(K_{ш}) = (n-1)/n$. Значения критерия Шарлье приведены в таблице 2.

Таблица 2.

n	5	10	20	30	40	50	100
$K_{ш}$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

Пользуясь критерием Шарлье, отбрасывают результат, для значения которого в ряду из n наблюдений выполняется неравенство $|x_i - \bar{x}| > K_{ш} S_x$.

Вариационный критерий Диксона удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок). При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возрастающий ряд x_1, x_2, \dots, x_n ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$). Критерий Диксона определяется как $K_d = (x_n - x_{n-1}) / (x_n - x_1)$. Критическая область для этого критерия $P(K_d > Z_q) = q$. Значения Z_q приведены в таблице 3.

Таблица 3

n	Z_q при q, равном			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

После исключения грубых погрешностей и промахов проводится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его СКО.

Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений. В последнем случае от выборки результатов измерений x_1, x_2, \dots, x_n переходят к выборке

отклонений от среднего арифметического $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, где $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$.

Первым шагом при идентификации закона распределения является построение по исправленным результатам измерений x_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, вариационного ряда (упорядоченной выборки), а также y_i , где $y_1 = \min(x_i)$ и $y_n = \max(x_i)$. В вариационном ряду результаты измерений (или их отклонения от среднего арифметического) располагают в порядке возрастания. Далее этот ряд разбивается на оптимальное число m , как правило, одинаковых интервалов группирования длиной $h=(y_n-y_1)/m$.

Число интервалов m выбирается из промежутка $m_{\min} = 0,55n^{0,4}$ и $m_{\max} = 1,25n^{0,4}$, которые получены для наиболее часто встречающихся на практике распределений, от равномерного до распределения Лапласа.

Значение m должно находиться между m_{\min} и m_{\max} и быть нечетным. В случае, если гистограмма распределения явно двухмодальная, число столбцов может быть увеличено в 1,5 – 2 раза, чтобы на каждый из двух максимумов приходилось примерно по m интервалов. Полученное значение длины интервалов группирования h всегда округляют в большую сторону, иначе последняя точка окажется за пределами крайнего интервала.

Далее определяют интервалы группирования экспериментальных данных в виде $\Delta_1 = (y_1, y_1+h)$; $\Delta_2 = (y_1+ h, y_1+2h)$;...; $\Delta_m = (y_n- h, y_n)$, и подсчитывают число попаданий n_k результатов измерений в каждый интервал группирования. Сумма этих чисел должна равняться числу измерений. По полученным значениям рассчитывают вероятности попадания результатов измерений в каждый из интервалов группирования по формуле $p_k=n_k/n$ где $k = 1, 2, \dots, m$.

По проведенным расчетам строят гистограмму, полигон и кумулятивную кривую. Для построения гистограммы по оси результатов наблюдения x откладываются интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строится прямоугольник высотой p_k . Полигон представляет собой ломаную кривую, соединяющую середины верхних оснований каждого столбца гистограммы. Он более наглядно, чем гистограмма, отражает форму кривой распределения. За пределами гистограммы справа и слева остаются пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам лежат на оси абсцисс. Эти точки при построении полигона соединяют между собой отрезками прямых линий.

Кумулятивная кривая – это график статистической функции распределения. Для ее построения по оси результатов наблюдения x откладываются интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строится прямоугольник высотой

$$F_k = \sum_{k=1}^k p_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^k n_k \quad (4)$$

Значение F_k называется кумулятивной частностью, а сумма n_k – кумулятивной частотой.

По виду построенных зависимостей может быть оценен закон распределения результатов измерений.

Определение доверительного интервала.

Если удалось идентифицировать закон распределения результатов измерений, то с его использованием находят квантильный множитель z_p при заданном значении доверительной вероятности P .

При нормальном законе распределения квантильный множитель определяется как $\Phi(z_p) = P/2$, где P – выбранная доверительная вероятность, Φ - функция Лапласа.

Доверительный интервал определяется, как

$$\bar{x} - z_p S_x / \sqrt{n} < x < \bar{x} + z_p S_x / \sqrt{n}$$

Значения функции $\Phi(z_p)$ приведены в таблице 2.

В тех случаях, когда распределение не является нормальным можно пользоваться распределением Стьюдента. В этом случае доверительный интервал определяют по формуле:

$$\bar{x} - t S_x / \sqrt{n} < x < \bar{x} + t S_x / \sqrt{n}$$

где t – значение распределения Стьюдента, определяемое по таблице 3.

Порядок проведения лабораторной работы.

1.1. Для выполнения лабораторной работы необходимо иметь следующие приборы:

- источник напряжения или генератор синусоидального напряжения;
- цифровой (образцовый) измерительный прибор.

1.2. Перед проведением работы необходимо подготовить таблицы (по образцу, приведенному ниже).

1.3. Собрать схему для проведения измерений.

1.4. Провести измерения в следующей последовательности:

- установить на шкале источника напряжения минимальное значение шкалы (например, 0,2),
- по образцовому прибору определить истинное значение измеряемой величины, записать показание в таблицу;
- установить следующее значение на шкале источника напряжения (например, 0,4),

- по образцовому прибору определить истинное значение измеряемой величины, записать показание в таблицу;
- аналогичным образом провести измерения по всем делениям шкалы.

1.5. Повторяя п.1.4 заполнить все строчки таблицы (провести не менее 20 измерений).

2. С использованием формул, приведенных в теоретической части работы, на компьютере провести расчет: среднего значения, СКО результата измерений, СКО среднего арифметического значения; устранить грубые погрешности и промахи, используя закон трех сигм и критерий Романовского; построить гистограмму и полигон; определить закон распределения результатов измерения, определить доверительные границы погрешности результата измерения и записать результат измерения.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_1										
X_2										
...										
X_n										
\bar{x}										
S_x										
$S_{\bar{x}}$										
$\bar{x} \pm \Delta_p$										

Таблица 2.

Значения функции Лапласа

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4886
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

Таблица 3.

Значения распределения Стьюдента

n	Доверительная вероятность Р				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
11	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
13	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
17	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29