

Задача 1. (5 баллов) К телу массой 1 кг, лежащему на горизонтальной поверхности, приложили силу 16 Н, направленную вверх под углом 60° к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,5. Найдите ускорение тела.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

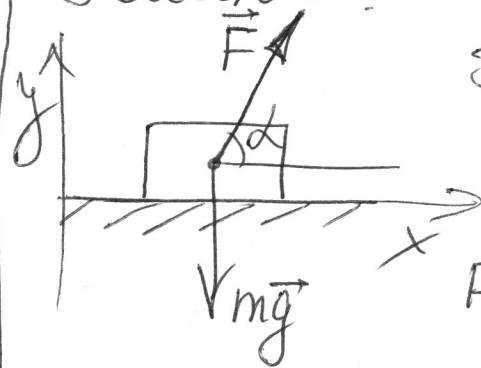
$$F = 16 \text{ Н}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\mu = 0,5$$

$$\vec{a} = ?$$

Решение:



Посчитаем вертик. проекцию F

$$F \sin \alpha = 16 \text{ Н} \cdot \sin 60^\circ = 13,9 \text{ Н}. \text{ Это}$$

больше, чем $mg = 10 \text{ Н}$.

Значит тело оторвется от поверхности и полетит под действием только этих двух сил.

$$\begin{cases} m a_x = F \cos \alpha \\ m a_y = F \sin \alpha - mg \end{cases}$$

$$m^2 a^2 = (F \cos \alpha)^2 + (F \sin \alpha - mg)^2$$

$$a = \frac{\sqrt{(F \cos \alpha)^2 + (F \sin \alpha - mg)^2}}{m}$$

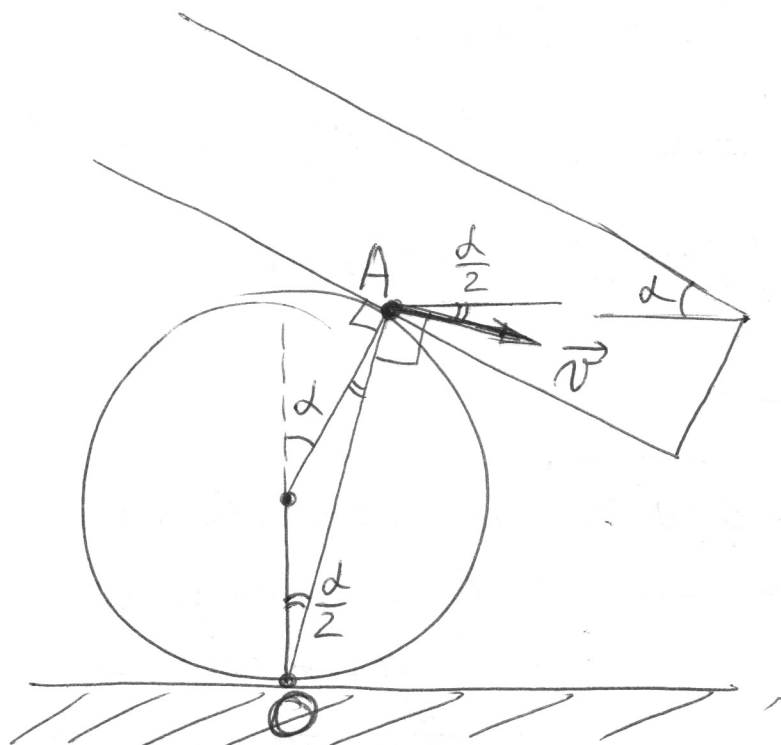
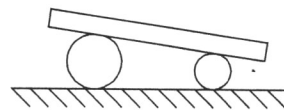
$$a = \frac{\sqrt{(16 \text{ Н} \cdot \cos 60^\circ)^2 + (16 \text{ Н} \sin 60^\circ - 1 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}})^2}}{1 \text{ кг}} =$$

$$= 8,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{F \sin \alpha - mg}{F \cos \alpha} = \frac{16 \text{ Н} \sin 60^\circ - 1 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}}{16 \text{ Н} \cos 60^\circ} =$$

$$= 0,48 \quad \beta = 26^\circ - \text{угол } \vec{a} \text{ к горизонту.}$$

Задача 2. (10 баллов) Тяжелая доска лежит на двух невесомых цилиндрических катках разных радиусов и составляет угол α с горизонтом. Проскальзывания нет. Найдите ускорение доски.



Т.к. между доской и катками нет проскальзывания, точка А доски движется с такой же скоростью, что и точка А катка.

(А — точка касания катка и доски). Эта скорость $\perp$ мгновенному радиусу вращения OA . O — мгновенный центр вращения. Из рисунка видно, что эта скорость направлена под углом $\frac{d}{2}$ к горизонту. И это справедливо для обоих катков. Т.к. балка невесомая, составляющие скоростей обеих точек касания в направлении балки одинаковые. А значит и сами скорости одинаковые. Т.е. доска движется поступательно. Т.к. скорости точки А для обоих катков одинаковы, то и скорости центров обоих катков одинаковы ($v_c = \frac{v}{2 \cos \frac{d}{2}}$) в один и тот же момент,

значит расстояние между катками не меняется, следовательно не меняется и угол наклона доски, а значит и направление скорости. Доска движется прямолинейно под углом $\frac{\alpha}{2}$ к горизонту.

Т.к. система «Земля-катки-доска» замкнутая и диссипативных сил в ней нет, то ее полная механическая энергия сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}$$

Дифференцируем по времени:

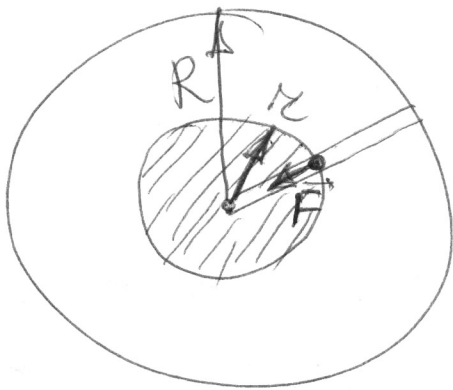
$$mvv' + mgh' = 0, \quad h' = v_y' = -v \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$vv' + g(-v \sin \frac{\alpha}{2}) = 0, \quad v' = a$$

$$a - g \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

Ответ: $\boxed{a = g \sin \frac{\alpha}{2}}$ и направлено вдоль скорости.

Задача 3. (8 баллов) Через толщу Земли от поверхности до центра проделан узкий канал. Во сколько раз время падения камня с поверхности Земли на ее центр больше времени его падения на центр с глубины, равной половине радиуса? Начальная скорость в обоих случаях равна нулю.



R — радиус Земли.

Землю считаем однородным шаром.

Известно, что со стороны шарового слоя находящегося вне сферы радиуса r , где

r — координата тела, все силы притяжения скомпенсированы.

$$m a_r(r) = - \frac{G m M(r)}{r^2} \quad - \text{II закон Ньютона}$$

$$a_r(r) + \frac{G M(r)}{r^2} = 0, \quad M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$a_r(r) + \frac{4}{3} \pi \rho G \cdot r = 0, \quad a_r = r''$$

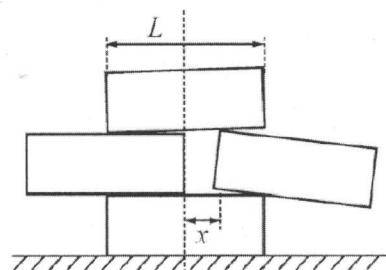
$$r'' + \frac{4}{3} \pi \rho G \cdot r = 0 \quad - \text{получилось дифференциальное уравнение гармонических колебаний.}$$

Для них период от амплитуды не зависит. Время падения на центр равно четверти периода и тоже не зависит от амплитуды.

Ответ: 1.

Задача 4. (5 баллов)

Из четырех одинаковых однородных ледяных кирпичиков длиной L каждый сложена симметричная стопка (см. рисунок). На какое максимальное расстояние x можно выдвинуть правый кирпичик, чтобы стопка не развалилась? Кирпичики очень гладкие.



Решение

Изобразим силы, действующие на верхний и правый кирпичики массами m в момент, когда правый кирпичик выдвинут на максимально возможное расстояние x (см. рис.). Запишем для верхнего и для правого кирпичика уравнения моментов относительно точек A и B , соответственно:

$$mg \frac{L}{2} = N_1 \left(\frac{L}{2} + x \right),$$

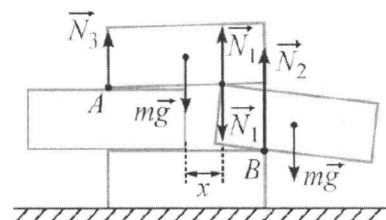
$$mgx = N_1 \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

Решая полученную систему уравнений, приходим к квадратному уравнению:

$$x^2 + Lx - \frac{L^2}{4} = 0.$$

Его положительный корень

$$x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} L \approx 0,21L.$$



Ответ: правый кирпичик можно выдвинуть на максимальное расстояние $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} L \approx 0,21L$.

Задача 5. (9 баллов)

Школьник выдувает через длинную трубку мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит наружу обратно через трубку. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время t . За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считать, что воздух движется по трубке достаточно медленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

Решение: Поверхностное натяжение мыльной пленки создает внутри пузыря добавочное давление = так называемое Лапласово давление. Это добавочное давление для пузырей «разумных размеров» (радиус которых значительно больше размеров молекул воды и мыла) существенно меньше внешнего атмосферного давления. Оно обратно пропорционально радиусу пузыря. При медленном течении воздуха в трубке силы трения воздуха о стенки трубки пропорциональны величине средней скорости движения воздуха в трубке. Следовательно, средняя скорость пропорциональна избыточному давлению в пузыре:

$$V \sim 1/R.$$

Объём пузыря убывает со «скоростью» пропорциональной скорости движения воздуха в трубке:

$$d(R^3)/dt \sim -1/R$$

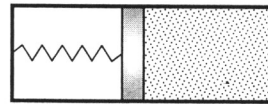
Получается дифференциальное соотношение/уравнение:

$$dR \times (R^3) \sim - dt$$

Время «сдувания» пузыря пропорционально R^4 .

Ответ: пузырь вдвое большего радиуса сдуется за время, равное $16 t$.

Задача 6. (8 баллов) Найдите теплоемкость системы, состоящей из перекрытого поршнем сосуда с 3 моль одноатомного идеального газа. Поршень удерживается пружиной. Слева от поршня вакуум. Если газ откачать, поршень соприкоснется с правой стенкой сосуда, а пружина будет не деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.

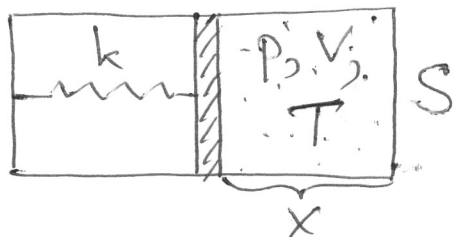


I способ (по определению)

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad \Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(pV) \quad - \text{изменение внутр. эн. газа;}$$

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{kx^2}{2}\right) \quad - \text{изменение потенц. энергии пружины.}$$



Процесс квазиравновесный.

Моловие равновесие

поршня в произвольный момент

$$kx = pS \quad - \text{сила упругости пружины уравновешивает силу давления газа.}$$

Выразим из x:

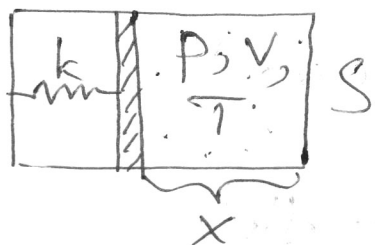
$$kx^2 = pSx, \quad Sx = V \quad - \text{объем газа.}$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{3}{2} \Delta(pV) + \frac{1}{2} \Delta(pV) = 2 \Delta(pV) = \\ &= 2 \nu R \Delta T \quad (\text{из ур-я Менд.-Ки.}) \end{aligned}$$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = 2 \nu R$$

$$C = 2 \cdot 3 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} = 50 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

II способ (по уравнению процесса)



Процесс считаем квазиравновесным.

Условие равновесия поршня в произвольный момент:

$$kx = pS \quad (\text{сила упр. пр. уравновешивает силу давления газа}).$$

Умножим на S :

$$kxS = pS^2, \quad xS = V$$

$$kV = pS^2$$

$pV^{-1} = \text{const}$ — получимось ур-е политропического процесса с $n = -1$

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} = -1$$

$$c - c_p = c_v - c$$

$$2c = c_p + c_v = \frac{5}{2}R + \frac{3}{2}R = 4R$$

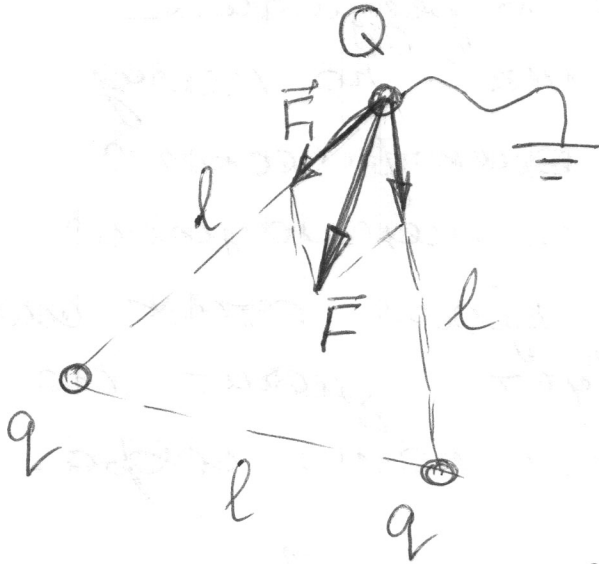
$$c = 2R$$

$$C = \nu c = 2\nu R$$

$$C = 2 \cdot 3 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} = 50 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

$$\text{Ответ: } C = 50 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Задача 7. (7 баллов) Три одинаковых металлических шарика радиуса r находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной l , причем r много меньше l . Двум шарикам сообщают одинаковый заряд q . Какая сила подействует на третий шарик, если его заземлить?



При заземлении на третий шарик потечет заряд, так, что его потенциал станет равным 0.

$$\frac{kq}{l} + \frac{kq}{l} + \frac{kQ}{r} = 0,$$

откуда

$$Q = -\frac{2qr}{l}$$

Сила направлена к центру треугольника и равна $F = F_1\sqrt{3}$, $F_1 = \frac{kqQ}{l^2} = \frac{2kq^2r}{l^3}$

$$F = \frac{2\sqrt{3}kq^2r}{l^3}$$

Задача 8. (6 баллов) Имеется электроплитка, сопротивление которой не зависит от температуры. Если ее включить в сеть с напряжением 55 В, то она нагреется до температуры 55°C. Если напряжение в сети 110 В, то плитка разогревается до 110°C. До какой температуры нагреется плитка, если ее включить в сеть с напряжением 220 В?

Дано:

$$U_1 = 55 \text{ В}$$

$$t_1 = 55^\circ\text{C}$$

$$U_2 = 110 \text{ В}$$

$$t_2 = 110^\circ\text{C}$$

$$U_3 = 220 \text{ В}$$

$$t_3 = ?$$

Решение:

Установившееся значение температур плитки соответствует равенству мощности тока, выделяющейся в плитке, мощности теплообмена с окр. средой. Считаем мощность теплообмена пропорциональной разности температур плитки и окр. среды.

$$\frac{U_1^2}{R} = k(t_1 - t_0)$$

t_0 — температура окр. среды

$$\frac{U_2^2}{R} = k(t_2 - t_0)$$

(считаем постоянный)

$$\frac{U_3^2}{R} = k(t_3 - t_0)$$

k — konst, одинаковая во всех трех ситуациях

Выведем получаем

$$\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}, \text{ откуда } t_0 = \frac{U_2^2 t_1 - U_1^2 t_2}{U_2^2 - U_1^2}$$

$$t_0 = \frac{110^2 \cdot 55 - 55^2 \cdot 110}{110^2 - 55^2} = \frac{110}{3} ^\circ\text{C}$$

$$\frac{U_1^2}{U_3^2} = \frac{t_1 - t_0}{t_3 - t_0}, \text{ откуда } t_3 = t_0 + \frac{U_3^2}{U_1^2} (t_1 - t_0)$$

$$t_3 = \frac{110}{3} + \left(\frac{220}{55}\right)^2 \left(55 - \frac{110}{3}\right) = 330^\circ\text{C}$$

Ответ: $t_3 = 330^\circ\text{C}$

Задача 9. (7 баллов) Непроводящее тонкое кольцо массы m и радиуса R находится в однородном магнитном поле с индукцией B . По кольцу равномерно распределен заряд q . Линии индукции перпендикулярны плоскости кольца. Какую угловую скорость приобретет кольцо при выключении магнитного поля?

Кольцо раскручивается в результате действия на распределенный по нему заряд сил вихревого электрического поля, порожденного меняющимся магнитным.

$$\mathcal{E}(t) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{2\pi R} \quad \text{— напряженность э. поля в кольце}$$

$$dF(t) = E(t) dq \quad \text{— сила, действующая на элемент кольца}$$

$$dM(t) = R dF(t) \quad \text{— момент этой силы}$$

Полный вращательный момент

$$M(t) = \int dM(t) = R \int dF(t) = R \int E(t) dq = R E(t) \int dq$$

$$M(t) = R q E(t) = R q \frac{\mathcal{E}(t)}{2\pi R} = \frac{q \mathcal{E}(t)}{2\pi}$$

Оск. ур. гир. брав. глеме:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M(t), \quad J = mR^2$$

$$mR^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{q}{2\pi} \left(-\pi R^2 \frac{dB}{dt} \right)$$

$$m d\omega = -\frac{q}{2} dB$$

$$\int_0^\omega m d\omega = - \int_B^0 \frac{q}{2} dB$$

$$m\omega = \frac{qB}{2}$$

Ответ:

$$\boxed{\omega = \frac{qB}{2m}}$$