

основные результаты курса общей физики

А.В. Шепелев

МЕХАНИКА

(Редактор. А.И. Черноуцан)

ВОПРОСЫ	ПАРАГРАФ
1. Координата, скорость и ускорение при одномерном движении	1.1
2. Координаты, радиус-вектор, скорость и ускорение при трехмерном движении	1.2
3. Угловая скорость и угловое ускорение	1.3
4. Нормальное и тангенциальное ускорение	1.4
5. Нормальное и тангенциальное ускорение при движении по окружности	1.5
6. Законы Ньютона	2.1
7. Сила тяготения	2.2
8. Сила упругости	2.3
9. Сила сухого трения	2.4
10. Законы сохранения и изменения импульса	3.1
11. Центр масс и его движение	3.2
12. Работа и мощность	3.3
13. Кинетическая энергия	3.3
14. Потенциальная энергия и потенциальные силы	3.4
15. Потенциальная энергия в поле силы тяготения	3.5
16. Потенциальная энергия силы упругости	3.5
17. Законы сохранения и изменения механической энергии	3.6
18. Упругий и неупругий удар	3.7
19. Момент импульса и момент силы	3.8
20. Законы сохранения и изменения момента импульса	3.8
21. Основной закон динамики вращательного движения. Момент инерции	4.1
22. Момент импульса и кинетическая энергия твердого тела	4.1, 4.2
23. Моменты инерции обруча, диска, шара, стержня	4.3
24. Теорема Штейнера	4.4
25. Постулаты СТО	5
26. Преобразование длины и времени в СТО	5.1
27. Сложение скоростей в СТО	5.2
28. Импульс и энергия в СТО	5.3

1. Кинематика

Если размерами тела в конкретной задаче можно пренебречь, то это тело называется материальной точкой. В дальнейшем материальную точку будем для краткости называть частицей. Положение частицы в пространстве в общем случае описывается тремя координатами, но в некоторых случаях оно может быть описано только одной либо двумя координатами – при этом говорят об одномерном или двумерном движении.

1.1 Скорость и ускорение при одномерном движении

Простейшим случаем движения является одномерное движение – движение, происходящее вдоль одной декартовой координатной оси. При одномерном движении скорость есть производная от координаты по времени.

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Если известна зависимость координаты частицы от времени, то можно точно определить и скорость в каждый момент времени, воспользовавшись правилами дифференцирования. Но обратное не верно – зная в каждый момент только скорость, координату определить нельзя – нужно знать начальную координату. Так, если известны скорость частицы в каждый момент времени $v_x(t)$ и координата в начальный момент времени x_0 , то в произвольный момент времени t ее координата есть

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt.$$

Ускорение точно так же связано со скоростью, как скорость с координатой. Ускорение есть производная от скорости по времени:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt},$$

так как скорость есть производная по времени от координаты, можно определить ускорение и как вторую производную от координаты

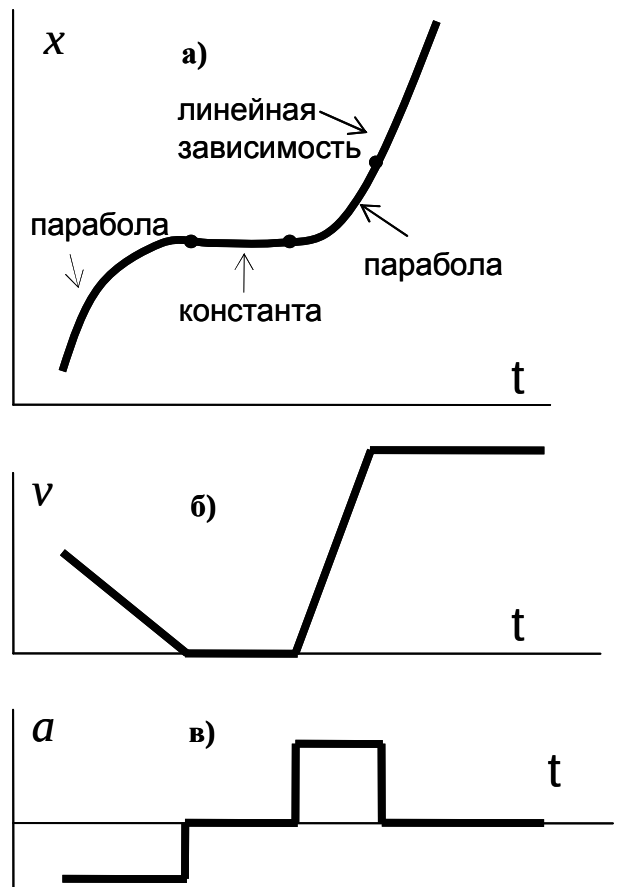


Рис.1

$$a_x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Если зависимость координаты от времени описывается графиком на Рис. 1а, то скорость описывается графиком на Рис.1б, а ускорение – графиком на Рис.1в.

Зная зависимость скорости от времени, можно точно определить ускорение. Обратное не верно – для определения скорости по известному ускорению нужно знать еще и скорость в начальный момент времени:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x(t) dt.$$

Если ускорение постоянно, то скорость частицы определяется по формуле

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot t,$$

а ее координата по формуле:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}.$$

1.2 Скорость и ускорение в общем случае

Трехмерное движение, т.е. движение в общем случае, можно представить как сумму независимых движений по трем декартовым осям X, Y, Z . Для движения по каждой оси справедливы формулы предыдущего параграфа. Так, скорость v_x и ускорение a_x по оси X определяются как первая и вторая производные от координаты x :

$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad a_x(t) = \frac{d}{dt} v_x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2},$$

аналогично определяются скорости и ускорения по осям Y, Z .

По абсолютной величине полная скорость и полное ускорение соответственно равны

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Такая запись является громоздкой и не всегда удобной.

Для описания движения удобно использовать понятие радиус-вектора. Радиус-вектором называется вектор, проведенный к некоторой точке из начала координат (Рис.2).

При движении частицы ее радиус-вектор зависит от времени, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; координаты радиус-вектора $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ также зависят

от времени. Линия, которую описывает конец радиус-вектора, называется траекторией.

Скоростью материальной точки называется предел отношения изменения радиус-вектора к промежутку времени, за которое произошло это изменение

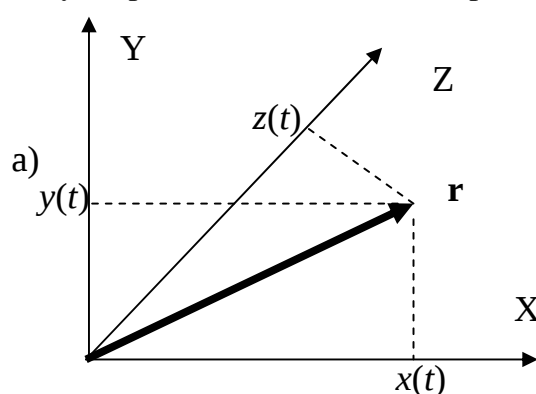


Рис. 2

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

т.е. скорость есть производная радиус-вектора по времени. Из этого определения следует, что скорость – векторная величина. Вектор скорости направлен по касательной к траектории.

Ускорение есть производная от скорости, или вторая производная радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t)$$

Так же как и скорость, ускорение – векторная величина. Однако вектор ускорения направлен по касательной к траектории только в том случае, когда траектория представляет собой прямую линию.

Если известно ускорение в каждый момент времени, то скорость в каждый момент времени равна

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt,$$

а если в каждый момент времени известна скорость, то радиус-вектор в каждый момент времени равен

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt,$$

где $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{r}_0$ - скорость и радиус-вектор в начальный момент. При постоянном ускорении

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a} t^2}{2}$$

Нетрудно видеть, что формулы, приведенные в начале этого параграфа, представляют собой проекции скорости и ускорения на декартовы координатные оси. Приведенные в предыдущем параграфе формулы для скорости и ускорения при одномерном движении являются частным случаем этих формул.

1.3 Движение по окружности. Угловая скорость и угловое ускорение

При движении частицы по окружности ее положение в каждый момент времени можно охарактеризовать двумя величинами. Одной из этих величин является радиус R окружности. Второй величиной является угол $\varphi(t)$, на который повернулся радиус-вектор частицы к моменту времени t . Этот угол отсчитывается относительно некоторого начального направления.

Угловая скорость определяется аналогично обычной скорости. Угловой скоростью называется производная по времени от угла поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

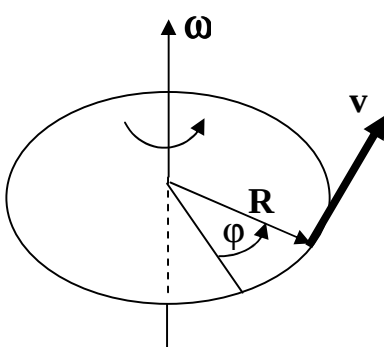


Рис. 3

Удобно считать угловую скорость векторной величиной. Если материальная точка движется так, как показано на Рис.3, то считается, что угловая скорость направлена вверх. Итак, **вектор угловой скорости равен**

$$\omega = e \frac{d\varphi}{dt},$$

где e - единичный вектор в направлении оси вращения, определяемый по правилу правого винта.

Связь между абсолютными величинами линейной скорости, угловой скорости и радиусом выражается формулой

$$v = \omega R.$$

В векторной форме скорость есть векторное произведение угловой скорости на радиус-вектор:

$$v = [\omega r]$$

Угловое ускорение ε есть первая производная угловой скорости по времени, или, что то же самое, вторая производная угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Зная угловое ускорение, начальную угловую скорость ω_0 , начальный угол φ_0 можно вычислить угловую скорость и угол в каждый момент времени:

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt, \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt$$

Если угловое ускорение постоянно, то эти формулы имеют вид

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t,$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При движении с постоянной угловой скоростью точка совершает полный оборот за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Это время называется периодом вращения. Следовательно, количество оборотов в секунду равно $\frac{\omega}{2\pi}$.

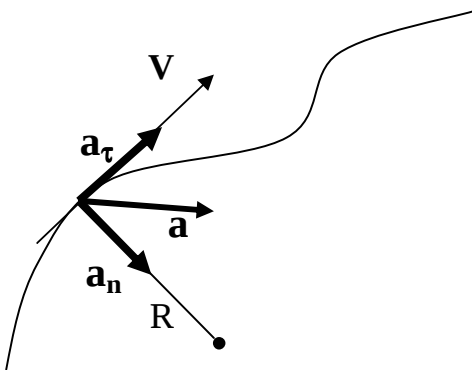


Рис. 4

1.4 Нормальное и тангенциальное ускорение

В течение малого промежутка времени участок траектории, по которой движется частица, можно приближенно считать участком окружности. Радиус этой окружности R называется радиусом кривизны траектории в некоторой ее точке, и в разных точках траектории может иметь разные значения (Рис.4). Единичные векторы τ и n направлены соответственно по скорости и к центру кривизны.

Полное ускорение частицы можно разложить на две компоненты. Одна из них, называемая тангенциальным ускорением, соответствует изменению вектора скорости по величине. Другая компонента, нормальное ускорение, соответствует изменению скорости по направлению.

Тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau}$ направлено по касательной к траектории. Если

абсолютная величина скорости со временем возрастает, то тангенциальное ускорение направлено в сторону движения, если убывает, то в противоположную. Если скорость постоянна, то тангенциальное ускорение равно нулю.

Нормальное ускорение может быть записано в трех разных формах:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{n} \cdot v\omega = \mathbf{n} \cdot \frac{v^2}{R} = \mathbf{n} \cdot \omega^2 R.$$

Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны.

Вектор полного ускорения есть сумма векторов нормального и тангенциального ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau.$$

Так как векторы нормального и тангенциального ускорений перпендикулярны друг другу, абсолютная величина полного ускорения равна

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

1.5 Нормальное и тангенциальное ускорение при движении по окружности

При движении частицы по окружности величина нормального ускорения равна

$$a_n = \omega^2 R.$$

Тангенциальное ускорение по величине равно

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon -$$

произведению радиуса на угловое ускорение. Если угловая скорость постоянна, то угловое ускорение равно нулю, и тангенциальное ускорение также равно нулю.

Величина полного ускорения, согласно общей формуле равная

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

при движении по окружности равна

$$a = \sqrt{R^2 \omega^4 + R^2 \varepsilon^2} = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

2. Законы Ньютона. Силы

Наиболее просто основные положения динамики формулируются в виде законов Ньютона. Законы Ньютона позволяют найти ускорения тел, если известны внешние воздействия на тела, либо известен характер взаимодействия тел. После этого, пользуясь законами кинематики, можно полностью определить характер движения тела, если известны еще и начальные координаты и скорость.

2.1 Законы Ньютона

Первый закон Ньютона. Существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых тело движется прямолинейно и равномерно либо покоится, если не подвергается внешнему воздействию. Основное значение первого закона состоит в том, что постулируется существование инерциальных систем отсчета и фактически дается определение свойств таких систем.

Второй закон Ньютона. Суммарная сила, действующая на тело, равна произведению массы этого тела на его ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

(в параграфе 3.2 будет приведена и другая формулировка этого закона). Нужно помнить, что с направлением силы совпадает направление ускорения, а не скорости.

Третий закон Ньютона. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению. Эти силы лежат на одной прямой (они приложены к разным телам).

2.2 Сила тяготения

Согласно закону, открытому Ньютоном, две частицы притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G - коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной.).

Можно доказать, что эти формулы верны и для тел, имеющих форму однородных шаров, если $\mathbf{r}$ есть вектор, соединяющий их центры. Поэтому сила тяжести, действующая на тело, находящееся у поверхности Земли, по величине равна

$$F = G \frac{Mm}{R^2},$$



Рис. 5

где M - масса Земли, m - масса тела, R - радиус Земли, и направлена к центру Земли. Найдём ускорение g , с которым движется к центру Земли

(падает) тело, находящееся вблизи поверхности, если на него действует только эта сила. По второму закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение, т.е.

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg,$$

откуда находим, что ускорение свободного падения g равно

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Если при своем движении тело перемещается на расстояние, небольшое по сравнению с радиусом Земли, то ускорение постоянно как по величине, так и по направлению.

2.3 Сила упругости

Сила упругости возникает при деформации тел и обусловлена взаимодействием атомов тела между собой, т.е. имеет электромагнитную природу. Рассмотрим

изображенный на Рис.6. закрепленный за один конец стержень, другой конец которого растягивается некоторой силой (очевидно, что на закрепленный конец действует при этом такая же сила, но направленная в противоположную сторону, иначе стержень начал бы двигаться). Под влиянием

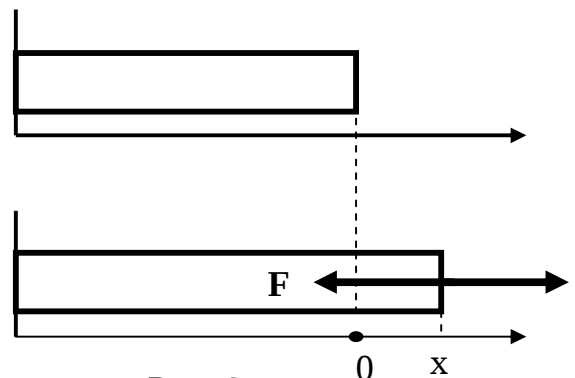


Рис. 6

растяжения длина стержня изменяется на X . Если деформация не слишком велика, то **величина силы упругости F пропорциональна величине деформации X :**

$$F = -kx, \text{ или } x = -\left(\frac{1}{k}\right)F,$$

где k - коэффициент пропорциональности, называемый **жесткостью**. Эту формулу называют **законом Гука**. Сила упругости приложена к тому объекту, который деформирует стержень. Знак «минус» показывает, что сила упругости направлена противоположно деформации.

2.4 Сила сухого трения

Силу, возникающую при контакте двух тел, можно разложить на две компоненты (Рис.7). Одна из этих сил, F_{TP} , лежит в плоскости касания тел. Другая, N , перпендикулярна плоскости касания. Первая называется силой трения, а вторая силой нормального давления. Их векторную сумму можно назвать силой реакции, хотя иногда силой реакции называют только силу N . Здесь рассматривается сила сухого трения, которая в дальнейшем называется просто силой трения.

Силы трения и нормального давления связаны между собой. **Если соприкасающиеся тела движутся относительно друг друга, то сила трения направлена противоположно скорости, а величину этой силы можно считать пропорциональной силе нормального давления:**

$$F_{TP} = \mu N.$$

Коэффициент пропорциональности μ , называемый коэффициентом трения, зависит от вида соприкасающихся поверхностей.

Если же два соприкасающихся тела покоятся друг относительно друга, то сила трения называется силой трения покоя. Благодаря силе трения покоя тело остается неподвижным, если на него действует некоторая не слишком большая внешняя сила F , лежащая в плоскости касания. Это значит, что сила трения покоя принимает значение, равное по величине силе F , и направлена противоположно ей. Максимальное значение, которое может иметь сила трения покоя, можно считать равным μN . Пока сила F не слишком велика, сила трения покоя в точности равна ей по величине и направлена в противоположную сторону (Рис.8). **При отсутствии движения сила трения покоя равна по величине и противоположна по направлению той силе, которая действует на тело в плоскости касания, но не может превышать μN .**

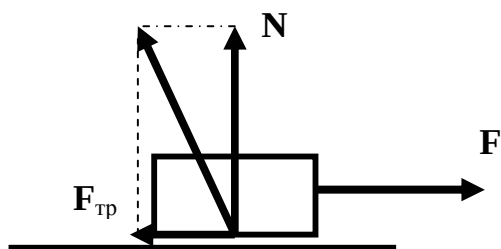


Рис.7

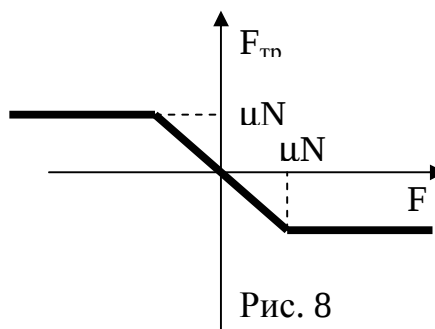


Рис. 8

3. Законы сохранения

Независимо от того, как частицы, образующие систему, взаимодействуют между собой, некоторые величины, характеризующие систему, сохраняются. В механике важнейшее значение имеют законы сохранения импульса, механической энергии и момента импульса.

3.1 Законы сохранения и изменения импульса

Второй закон Ньютона, обычно записываемый в виде $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, можно записать как

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где **векторная величина $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ называется импульсом частицы**. Если имеется система частиц, то, сложив вместе все такие уравнения для каждой частицы, получим

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{внешн}} = \frac{d\Sigma m_i \mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\Sigma \mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

где **сумма импульсов частиц системы называется импульсом системы, $\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{p}_i$** . (Нужно отметить, что в последней формуле $\Sigma \mathbf{F}_{\text{внешн}}$ есть сумма только внешних сил, так как все внутренние силы, действующие между частицами, взаимно уничтожаются согласно третьему закону Ньютона).

Последняя формула представляет собой **закон изменения импульса системы**:

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{внешн}} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} -$$

сумма действующих на систему внешних сил равна производной от ее полного импульса. В упрощенном виде это можно записать как $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{F} \Delta t$ - изменение импульса $\Delta \mathbf{P}$ равно импульсу силы $\mathbf{F} \Delta t$.

Крайне важным является следствие из этого закона. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то равна нулю и производная от импульса системы - это значит, что полный импульс системы не зависит от времени. Таким образом, получен **закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы, т.е. системы, не подвергающейся внешним воздействиям, остается постоянным.**

Импульс – векторная величина. Из этого следует, что если по какой-то оси на систему не действуют внешние силы (или сумма их проекций на эту ось равна нулю), то проекция полного импульса системы на эту ось остается постоянной.

3.2. Центр масс и его движение

Центром масс системы называется точка в пространстве, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i};$$

скорость центра масс системы равна отношению импульса системы к ее массе всей системы:

$$\mathbf{v}_c = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma m_i} \right) = \frac{\Sigma m_i \mathbf{v}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\mathbf{P}}{\Sigma m_i}$$

Из закона изменения импульса системы следует, что **центр масс системы движется с таким ускорением, с каким двигалась бы частица с массой, равной суммарной массе системы, если бы к ней были приложены все действующие на систему внешние силы:**

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{внешн}} = \Sigma m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2}.$$

Хотя движение каждой частицы системы зависит действующих на нее и внешних, и внутренних сил, движение центра масс системы от внутренних сил совершенно не зависит.

3.3 Работа, мощность, кинетическая энергия

Работой, которую сила $\mathbf{F}$ совершает над телом при его перемещении на вектор $d\mathbf{r}$, называется скалярная величина dA , равная скалярному произведению силы на перемещение $dA = \mathbf{F} d\mathbf{r}$.

Напомним, что скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними, см. Рис.9, и формулу для работы можно записать в виде

$$dA = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \alpha.$$

При перемещении от точки M с радиус-вектором $\mathbf{r}_M$ до точки N с радиус-вектором $\mathbf{r}_N$ работа равна

$$\Delta A = \int_{\mathbf{r}_M}^{\mathbf{r}_N} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Поэтому, если сила постоянна, то $\Delta A = \mathbf{F}(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_M) = \mathbf{F} \Delta \mathbf{r}$

Мощностью называется производная от работы по времени:

$$N = \frac{dA}{dt},$$

средняя мощность равна $N_{cp} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$.

Из определения работы следует, что мощность равна

$$N = \mathbf{F} \mathbf{v} = F \cdot \cos \alpha \cdot v, \quad \text{где } \mathbf{v} - \text{ скорость.}$$

Подставив $m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ - произведение массы на производную от скорости, т.е. на ускорение, вместо

$\mathbf{F}$ в выражение для работы, получаем:

$$A_{MN} = \int_M^N m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = \int_M^N m \frac{d\mathbf{r}}{dt} d\mathbf{v} = \int_M^N m \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{mv_N^2}{2} - \frac{mv_M^2}{2}.$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией. Кинетическая энергия – это энергия

тела, обусловленная его движением. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\frac{mv_N^2}{2} = \frac{mv_M^2}{2} + A_{MN},$$

которая означает, что кинетическая энергия тела равняется сумме его исходной кинетической энергии, и работы, совершенной над телом.

3.4 Потенциальная энергия. Потенциальное поле

Потенциальной энергией тела называется та его энергия, которой оно обладает вследствие того, что занимает определенное положение в пространстве. Это выполняется, если работа по перемещению тела из одного положения в другое не зависит от того, по какой траектории происходит это перемещение. В этом случае каждой точке пространства можно поставить в соответствие некоторую величину, а работа по перемещению из одной точки в другую будет являться разностью этих величин. Данная величина и будет потенциальной энергией тела. Если в каждой

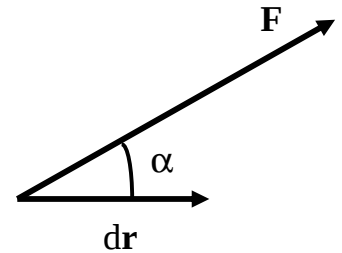


Рис. 9

точке пространства определена потенциальная энергия, то говорят, что задано определенное потенциальное поле, или поле потенциальных сил.

Итак, в потенциальном поле работа, совершаемая силами поля по перемещению материальной точки из положения M в положение N , равна разности потенциальных энергий, которые имеет материальная точка в этих положениях:

$$A_{MN} = W_M - W_N.$$

Из этой формулы и из определения работы

$$A = \int_{r_M}^{r_N} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

следует, что потенциальная сила связана с потенциальной энергией соотношением

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W.$$

- потенциальная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. В простейшем случае, когда потенциальная энергия зависит только от координаты x ,

$$F_x = -\frac{dW(x)}{dx}.$$

Так как физический смысл имеет только разность потенциальных энергий, ничего не изменится, если потенциальную энергию отсчитывать от любой произвольной точки. Другими словами, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной, одинаковой для всех точек пространства.

3.5 Потенциальная энергия в поле сил тяготения и упругости

Из связи между силой и потенциальной энергией легко рассчитывается потенциальная энергия сил тяготения и упругости. При расчете потенциальной энергии вблизи поверхности Земли можно считать, что сила тяготения постоянна и равна mg . Если тело находится на высоте h относительно Земли, то потенциальная энергия тела равна

$$W(h) = mgh.$$

Если тело смещается относительно поверхности Земли на большое расстояние X по вертикали, то потенциальная энергия в общем виде выражается формулой равна

$$W(r) = -\frac{GMm}{r} + C,$$

где r - расстояние до центра Земли, C - константа.

Потенциальная энергия и при растяжении, и при сжатии на величину X относительно положения равновесия равна

$$W = \frac{kx^2}{2}.$$

3.6 Закон сохранения и изменения механической энергии

Механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергии. Если на все частицы системы действуют только потенциальные силы, то механическая энергия системы остается постоянной.

Закон сохранения механической энергии нельзя путать с законом сохранения полной энергии, согласно которому полная энергия системы остается неизменной. Механическая энергия системы не сохраняется, если действуют непотенциальные силы. В общем случае выполняется закон изменения механической энергии:

$$(E_{\text{кин}N} + W_{\text{пот}N}) = (E_{\text{кин}M} + W_{\text{пот}M}) + A_{\text{непот}} -$$

конечная механическая энергия равна начальной механической энергии плюс работе, совершенной непотенциальными силами.

Важной непотенциальной силой является сила трения. Если система замкнута и непотенциальной силой является только сила трения, то механическая энергия системы со временем убывает. Однако механическая энергия замкнутой системы может и возрасти, например, при начале работы устройств, входящих в состав системы. В этом случае в механическую энергию переходит химическая энергия топлива или электрическая энергия, которые чаще всего обеспечивают работу устройств.

3.7 Упругий и неупругий удар

В отличие от импульса, который в замкнутой системе сохраняется всегда, кинетическая энергия при ударе может не сохраняться. При ударе она сохраняется только в том случае, когда возникающие силы взаимодействия являются потенциальными. Такими, в частности, являются силы упругости. Удар, при котором сохраняется кинетическая энергия, называется упругим (иногда его называют абсолютно упругим).

Неупругим (или абсолютно неупругим) называется удар, при котором после столкновения частицы движутся как единое целое (слипаются). Кинетическая энергия при неупругом ударе не сохраняется, и после такого удара частично переходит в тепло. В соответствии с законом сохранения энергии, количество теплоты, выделившейся при ударе, равно разности начальной и конечной кинетической энергии.

3.8 Момент импульса, момент силы

Помимо импульса существует еще одна векторная величина, называемая моментом импульса, которая сохраняется в замкнутой системе.

Моментом импульса частицы называется векторное произведение ее радиус-вектора и импульса

$$\mathbf{l} = [\mathbf{r} \mathbf{p}],$$

а полным моментом импульса $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$ – суммой моментов импульсов всех частиц системы.

Векторное произведение радиус-вектора на силу $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{F}]$ называется моментом этой силы. Необходимо напомнить, что начало координат можно выбрать в любой точке.

Можно доказать, что выполняется закон изменения момента импульса системы: производная от момента импульса системы равна сумме моментов действующих на систему внешних сил:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum \mathbf{M}_i.$$

В том случае, когда система замкнута, т.е. на нее не действуют внешние силы, производная по времени от момента импульса равна нулю. Таким образом, выполняется закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы остается постоянным.

4. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

4.1 Основной закон динамики вращательного движения в простейшем случае

Самый простой случай вращательного движения - вращение тела вокруг неподвижной оси, происходящее под действием силы, лежащей в плоскости вращения, Рис.10 (ось вращения, обозначенная буквой О, перпендикулярна плоскости рисунка). Закон изменения момента импульса, согласно которому производная по времени от момента импульса равна сумме моментов сил, приобретает при этом скалярную форму

$$\frac{d}{dt}L = \sum M_i.$$

При плоском вращении момент импульса L выражается формулой

$$L = \sum R_i m_i v_i,$$

где m_i - масса каждой частицы тела, R_i - расстояние от частицы до оси вращения, v_i - скорость частицы. Скорость каждой частицы равна произведению расстояния до оси на угловую скорость ω , общую для всех частиц твердого тела:

$$v_i = \omega \cdot R_i,$$

поэтому выражение для момента импульса приобретает вид

$$L = \sum R_i m_i v_i = \sum R_i m_i \omega R_i = \sum m_i R_i^2 \omega.$$

Вынося общий множитель ω за знак суммы, получаем, что **момент импульса численно равен вращающегося твердого тела равен**

$$L = \omega I, \text{ где}$$

величина $I = \sum m_i R_i^2$ - сумма произведений массы каждой частицы тела на квадрат ее расстояния до оси - называется моментом инерции тела. У твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, момент инерции от времени не зависит.

Подставляя ωI вместо L в закон изменения момента импульса, и учитывая, что производная момента импульса равна произведению момента инерции на производную от угловой скорости, т.е. на угловое ускорение, получаем **основной закон динамики вращательного движения:**

$$I\varepsilon = \sum M_i -$$

произведение момента инерции на угловое ускорение равно сумме моментов действующих на тело сил. Этот. Нужно помнить, что момент силы может быть и положительным и отрицательным; знак определяется правилом векторного произведения.

Момент M произвольной силы F есть векторное произведение радиус-вектора, проведенного от оси вращения к точке приложения силы, на силу. По величине он равен

$$M = r \cdot \sin \alpha \cdot F = Fa$$

где r расстояние от оси вращения до точки приложения силы, a - плечо силы (длина перпендикуляра, проведенного от оси вращения до линии действия силы). Таким образом, в простейшем случае момент силы равен произведению силы на плечо.

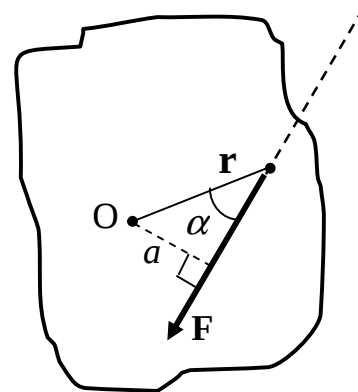


Рис. 10

4.2 Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна сумме кинетических энергий всех частиц, составляющих тело:

$$E_K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i и V_i - масса и скорость частицы с номером i . Но скорость частицы V_i равна произведению угловой скорости вращения твердого тела ω на расстояние до оси R_i :

$$v_i = \omega R_i, \quad \text{следовательно}$$

$$E_K = \sum \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \sum \frac{\omega^2}{2} m_i R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i R_i^2.$$

Сумма $\sum m_i R_i^2$ есть момент инерции I . В результате получаем, что **кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции на квадрат угловой скорости:**

$$E_K = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Если помимо вращения твердое тело движется еще и поступательно, то полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

4.3 Моменты инерции некоторых тел

Обруч (ось вращения проходит через его центр перпендикулярно плоскости обруча)	mR^2 (m -масса, R -радиус)
Диск (ось вращения проходит через его центр перпендикулярно плоскости диска)	$\frac{mR^2}{2}$ (m -масса, R -радиус)
Шар (ось вращения проходит через его центр)	$\frac{2}{5}mR^2$ (m -масса, R -радиус)
Стержень (ось вращения проходит через его центр и перпендикулярна стержню)	$\frac{ml^2}{12}$ (m -масса, l -длина)

4.4 Теорема Штейнера

Момент инерции тела зависит от положения оси вращения. Согласно теореме Штейнера, момент инерции I_O относительно произвольной оси O равен сумме момента инерции I_C относительно оси C , проходящей через центр масс и параллельной оси O , и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_O = I_C + ma^2.$$

5. Элементы специальной теории относительности (СТО)

Основу СТО можно сформулировать в виде двух постулатов:

1) Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому наблюдатели, находящиеся в разных инерциальных системах отсчета, принципиально не могут определить, кто из них находится в покое, а кто в состоянии движения – можно установить только относительное движение этих систем.

2) Скорость света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с) не зависит от скорости источника. Невозможно движение частицы со скоростью, большей этой величины.

Эти постулаты являются обобщением опытных фактов.

5.1 Преобразование длины и промежутка времени в СТО

С точки зрения неподвижного наблюдателя, размер объекта сокращается в направлении движения объекта. Если размер неподвижного объекта равен Δx , то при его движении по оси X со скоростью v он равен

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

размеры по осям Y и Z не изменяются.

Движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные. Если по неподвижным часам промежуток времени между двумя событиями равен Δt , то по подвижным часам он равен

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(предполагается, что события происходят в одной точке).

5.2 Сложение скоростей в СТО

Если в системе отсчета, движущейся по оси X со скоростью u относительно неподвижной системы отсчета, частица движется вдоль этой оси со скоростью v , то в неподвижной системе отсчета скорость частицы равна

$$v' = \frac{v + u}{1 + uv/c^2}.$$

Отсюда в частности следует, что v' меньше скорости света, если $v < c$, и $v' = c$, если $v = c$. Это соответствует второму постулату СТО.

5.3 Импульс и энергия в СТО

Согласно СТО, импульс частицы равен

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Второй закон Ньютона в формулировке $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ сохраняет в СТО свою форму, но импульс должен записываться в указанном виде.

Энергия частицы равна

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

У покоящейся частицы нулевая скорость, при этом ее энергия равна m_0c^2 - эта величина называется энергией покоя. Кинетическая энергия, т.е. энергия, обусловленная движением, равна разности полной энергии и энергии покоя:

$$E_{кин} = E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2.$$

При скорости частицы, много меньшей скорости света, это выражение переходит в классическое $\frac{mv^2}{2}$.

Энергия и импульс связаны соотношениями

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}.$$