РГУ нефти и газа им. И.М. ГУБКИНА

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ФАКУЛЬТЕТА ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

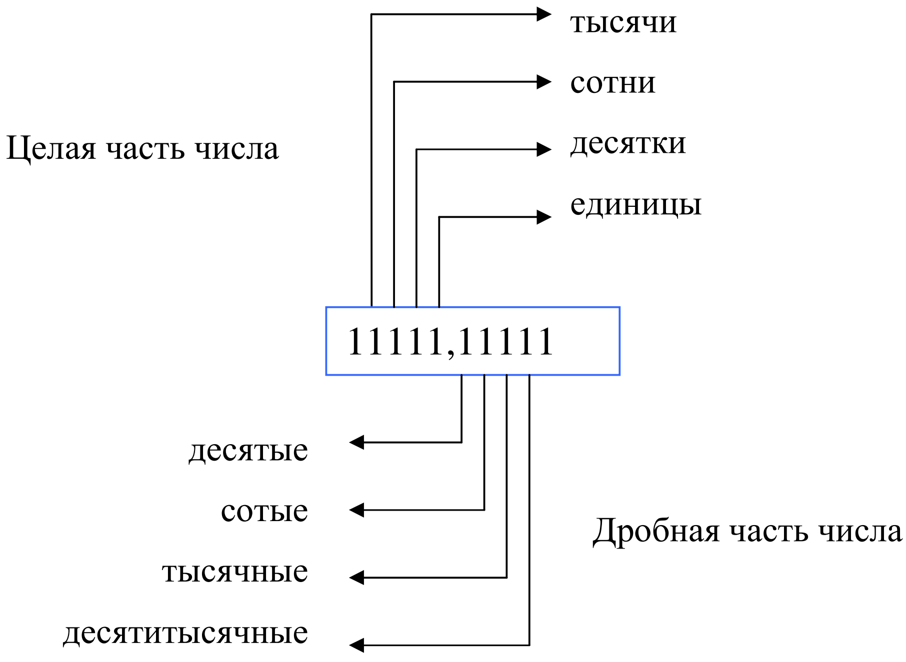
Автор профессор Бекетов В.Г.

ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

ТОЧНОСТЬ. ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ ЧИСЛА

Результаты измерений и расчетов записываются с помощью **чисел**. Числа состоят из **цифр**. Цифр всего десять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Числа состоят из целой и дробной частей. Дробная часть числа записывается в виде десятичной дроби. Каждая цифра в числе стоит на определенном месте, которое называется разрядом. Разряды с их наименованиями изображены ниже на схеме.



Любое число можно записать **в стандартном виде** с помощью степени с основанием 10. В этом случае **целая часть числа содержит только разряд единиц**, а остальные цифры числа находятся в его дробной части. Для сохранения разряда целой части числа используется множитель – степень 10^n, где показатель n равен максимальному номеру разряда исходного числа.

Например, число 5237 в стандартном виде должно быть записано так: $5{,}237 \cdot 10^3$.

Источником числовых данных могут быть только измерения. Любой результат измерения принято записывать с указанием соответствующей абсолютной погрешности измерения, которая выражается в тех же единицах, что и сама величина. Для обозначения абсолютной погрешности используется символ Δ.

Например, при измерении силы тока в амперах результат измерения записывают так:

$$i = (0{,}25 \pm 0{,}02) \text{ А},$$

где $\Delta i = 0{,}02$ А – модуль так называемой абсолютной погрешности измерения.

Если конкретное число является результатом измерения, то запись этого числа должна обязательно содержать все цифры вплоть до последнего разряда числа, соответствующего самому мелкому делению прибора.

Допустим, мы измеряем диаметр цилиндра микрометром, позволяющим измерять этот диаметр вплоть до 0,01 мм (одной сотой миллиметра). В этом случае результат измерения должен содержать конкретное число десятых и конкретное число сотых миллиметра. Пусть при этом микрометр показал, например, ровно 12 миллиметров. В этом случае результат измерения должен быть записан так: (12,00 ± 0,01) мм.

Точность результата измерения определяется так называемой относительной погрешностью – отношением абсолютной погрешности измерения к самому числу – результату измерения, умноженным на 100 %. Относительная погрешность – всегда безразмерное число. Для обозначения относительной погрешности используется символ ε.

Так относительная погрешность результата измерения диаметра в нашем примере равна $\frac{0{,}01\text{мм}}{12{,}00\text{мм}} = \frac{1}{1200} = 0{,}00083 = 0{,}083\ \%$.

Все числа, с которыми мы имеем дело при решении задач, являются результатами измерений и последующих расчетов. Поэтому все числа являются приближенными и записываются с помощью конечного числа цифр, зависящего от точности этого числа. При этом погрешность числа, как правило, не записывается. Принято считать, что все цифры записанного конкретного числа являются точными за исключением последней, а модуль погрешности этой последней записанной цифры равен 1. При этом погрешность последней цифры считается погрешностью самого числа, причем в том разряде, в котором и находится эта последняя цифра.

Например, в числе 4,53 верными считаются цифры 4 и 5, а цифра 3 имеет погрешность ±1. При этом погрешность самого числа равна ± 0,01. С указанием погрешности это число должно быть записано так:

$$4{,}53 \pm 0{,}01.$$

Особую трудность в понимании смысла точности числа представляют нули. Последние нули в целой части числа необходимы для обозначения его разряда, но они ничего не говорят о точности числа. Чтобы выяснить точность этого числа, его нужно записать в стандартном виде. Если нули окажутся последними в дробной части числа, то единственным их назначение будет указание на точность этого числа.

Например, в записи числа 2000 нельзя обойтись без этих трех нулей, иначе это число превратится в 2. А если это число записать в стандартном виде $2{,}000 \cdot 10^3$, то без этих трех нулей можно было бы обойтись Ведь числа 2, 2,0, 2,00 и 2,000 по величине совершенно одинаковы. Значит, эти нули необходимы для обозначения точности числа:

2 – это 2 ± 1,

2,0 – это 2,0 ± 0,1,

2,00 – это 2,00 ± 0,01,

2,000 – это 2,000 ± 0,001.

Точность числа определяется его относительной погрешностью – отношением абсолютной погрешности к самому числу, умноженным на 100 %.

Так точность числа 2 равна 1/2 = 50 %, точность числа 2,0 равна 1/20 = 5 %, точность числа 2,00 равна 0,5 %, а точность числа 2,000 равна 0,05 %. **Чем больше цифр в записи числа, тем оно точнее**.

Рассмотрим два числа с одинаковым набором цифр: 1,23 и 123. Какое из них точнее? Точность числа 1,23 равна 0,01/1,23 = 1/123, точность числа 123 равна 1/123. Значит, **точности разных по величине (разряду) чисел с одинаковым набором цифр равны**.

Следовательно, точность числа никак не связана с разрядами этого числа, а зависит только от числа так называемых значащих цифр.

Значащими цифрами являются все цифры числа, обязательно содержащего дробную часть, считая слева направо, начиная с первой, отличной от нуля.

Так в числе 2357, например, четыре значащие цифры, в числе 2,357 тоже четыре значащие цифры, в числе 2000 число значащих цифр определить невозможно. В числе 2000,0 – пять значащих цифр. В числе 0, 00012300 значащими являются последние пять цифр: 1, 2, 3, 0, 0. Первые четыре нуля нужны **только для обозначения разряда** и пропадут при записи числа в стандартном виде: $1{,}2300 \cdot 10^{-4}$.

Чтобы выяснить точность целого числа с последними нулями, это число нужно записать в стандартном виде. Оставшиеся после запятой нули укажут на точность числа.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА РАСЧЕТА

При сложении или вычитании двух чисел складываются их абсолютные погрешности. Но при расчетах по физическим формулам мы имеем дело, как правило, с умножением и делением. Покажем, что при умножении или делении двух чисел или двух степеней складываются их относительные погрешности.

Пусть расчетная формула выглядит следующим образом:

$$z = A \cdot x^m \cdot y^n,$$

где A = const, а m и n – целые числа, положительные или отрицательные. Относительные погрешности величин x, y, и z будут соответственно равны:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}, \; \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}, \; \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y}.$$

Прологарифмируем исходную формулу:

$$\ln z = \ln A + m \ln x + n \ln y .$$

Найдем дифференциал левой и правой частей, используя частные производные:

$$\frac{dz}{z} = 0 + m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} .$$

Три дифференциала dz, dx, и dy примем за соответствующие абсолютные погрешности: $dz = \Delta z$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Получим соотношение между относительными погрешностями:

$$\varepsilon_z = m\varepsilon_x + n\varepsilon_y ,$$

то есть относительные погрешности множителей и делителей складываются, что и требовалось доказать. Притом складываются столько раз, сколько раз каждый из них входит в формулу множителем (делителем): m раз x и n раз y.

Полученная формула связи относительных погрешностей справедлива только в том случае, если величины x и y или обе завышены или обе занижены. Но на практике погрешности величин, входящих в формулу, как правило, компенсируют друг друга. Поэтому относительную погрешность результата расчета принято считать как среднюю квадратичную:

$$\varepsilon_z = \sqrt{(m\varepsilon_x)^2 + (n\varepsilon_y)^2} .$$

Итак, **в результате любых вычислений (расчетов) погрешность всегда возрастает**. Если исходные данные, использованные для расчетов, содержали не более двух значащих цифр, то результат расчета будет содержать только одну верную цифру – первую, вторая цифра уже будет содержать ошибку.

Поэтому **при решении расчетных задач в ответе можно писать не более двух цифр. Остальные цифры должны быть отброшены с выполнением правила округления**: если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя оставленная цифра не меняется, а если первая отбрасываемая цифра равна или больше 5, то последняя оставленная цифра увеличивается на 1.

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Различают прямые и косвенные измерения. Прямое измерение состоит в сравнении измеряемой величины с эталоном с помощью измерительного прибора. Косвенное измерение представляет собой расчет измеряемой величины по формуле, в которую подставляют результаты прямых измерений.

Например, объем некоторого тела можно измерить методом вытеснения жидкости с помощью мерного цилиндра – прямое измерение. А можно, измерив соответствующие линейные размеры тела, вычислить его объем по формуле – косвенное измерение.

Для расчета погрешностей результатов прямых измерений некоторой величины x нужно сделать несколько (n) измерений этой величины. Напоминаем, что запись каждого из n результатов измерения **должна обязательно содержать все цифры, в том числе и 0 вплоть до последнего разряда числа, соответствующего самому мелкому делению прибора**. Далее обработка идет по следующей схеме.

1. Вычисляем среднее арифметическое значение величины x по формуле

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Среднее значение также должно содержать столько цифр, в том числе и нулей, сколько их в записях результатов измерений.

2. Вычисляем среднюю квадратичную погрешность величины x по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{ср}$ – абсолютная погрешность каждого из n результатов измерений. **В записях квадратов этих абсолютных погрешностей должно содержаться в два раза больше цифр, в том числе и нулей, чем в записях результатов измерений. А в записи средней квадратичной погрешности – столько же цифр, что и в записях результатов измерений**.

3. Вычисляем предварительную абсолютную погрешность измеряемой величины путем умножения ее средней квадратичной погрешности на коэффициент Стьюдента. Значение коэффициента Стьюдента для данного числа n и для доверительной вероятности $\alpha = 95$ % берем из таблицы.

$$\Delta x' = \sigma \cdot t_\alpha(n).$$

В записи этой погрешности должно содержаться столько же цифр, что и в записях результатов измерений.

4. Вычисляем окончательную абсолютную погрешность измеряемой величины с учетом погрешности прибора δ по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x')^2 + \delta^2}.$$

Значение этой погрешности нужно округлить, оставив только две значащие цифры.

5. Уточняем запись среднего значения измеряемой величины, сопоставив его с величиной абсолютной погрешности. **Число, обозначающее среднее значение измеряемой величины, нужно округлить, оставив в нем все цифры вплоть до разряда, являющегося последним в окончательной записи абсолютной погрешности**. Записываем результат измерений в виде суммы округленного среднего значения и абсолютной погрешности:

$$x = x_{ср} \pm \Delta x.$$

Например, мы получили следующие величины: среднее значение $x_{ср}$ = 2,36752 и значение окончательной абсолютной погрешности: Δx = 0,08364. После округления получим Δx = 0,084. Следовательно, среднее значение нужно округлить до тысячных: $x_{ср}$ = 2,368. Окончательно запишем

$$x = 2{,}368 \pm 0{,}084.$$

6. Вычисляем относительную погрешность измеряемой величины по формуле

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ср}}}.$$

Относительную погрешность, как правило, выражают в процентах. **Значение этой погрешности нужно округлить, оставив только две значащие цифры**.

КОЭФФИЦИЕНТ СТЬЮДЕНТА

Число прямых измерений всегда конечно. Поэтому средняя квадратичная погрешность заведомо меньше истинной абсолютной погрешности. Чтобы получить близкое к реальности значение абсолютной погрешности, нужно увеличить среднюю квадратичную погрешность, умножив ее на коэффициент Стьюдента. В теории Стьюдента рассчитаны **значения этого коэффициента в зависимости от доверительной вероятности и числа измерений**. С ростом доверительной вероятности, то есть надежности значения абсолютной погрешности, коэффициент Стьюдента **увеличивается**. А с ростом числа измерений, увеличивающим надежность результатов, коэффициент Стьюдента **уменьшается**.

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Какие измерения называются прямыми, а какие – косвенными?

2. Что такое абсолютная и относительная погрешности? Чему равна, например, погрешность числа 2,50?

3. Как выполнить расчет погрешности результатов прямых измерений? Какие шесть шагов нужно при этом сделать?

4. Как зависит коэффициент Стьюдента от числа измерений и от доверительной вероятности?

5. Как выполнить оценку погрешности результата косвенного измерения? Составьте формулу для расчета, например, относительной погрешности результата вычисления электрической мощности P по формуле: $P = \frac{U^2}{R}$, где U – напряжение на участке, R – сопротивление участка.

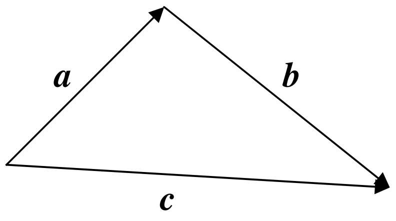
КОЕ-ЧТО ИЗ МАТЕМАТИКИ

Для успешного освоения предлагаемого курса физики нужно знать основы математического анализа и, как минимум, **уметь найти производную от комбинации элементарных функций и взять табличный интеграл**.

Также нужно **знать, что такое вектор и как с ним работать**, поскольку в описании физической реальности нельзя обойтись без векторных величин. **Многие физические величины являются векторами**.

Напомним, что вектор можно изобразить в виде направленного отрезка определенной длины. <u>Вектор</u> имеет две характеристики: <u>модуль</u> (абсолютную величину или просто величину) и <u>направление</u>. Каждая из этих характеристик может быть постоянной или изменяться независимо от другой.

Векторы складываются по <u>правилу треугольника</u>, как это показано на рисунке, где векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$ обозначены жирными буквами: ***a***, ***b***, ***c***.

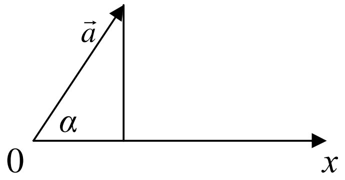


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

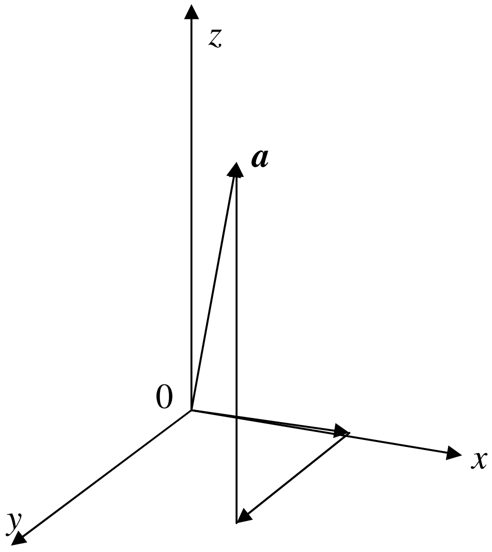
При умножении вектора на число получается новый вектор, который направлен в ту же сторону, что и старый, если число положительное, и в противоположную сторону, если число отрицательное. Модуль нового вектора равен произведению модуля старого вектора на модуль этого числа.

При умножении вектора на число 0, получается <u>нулевой вектор</u>, не имеющий ни величины, ни направления.

Любой вектор можно спроецировать на ось координат. Проекция вектора на ось координат равна произведению модуля этого вектора на косинус угла между вектором и осью. Если угол острый, то его косинус и соответственно проекция вектора положительны. Если угол тупой, то его косинус и соответственно проекция вектора отрицательны. Если вектор перпендикулярен оси, то его проекция на эту ось равна нулю.



$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha .$$



Любой вектор можно представить в виде суммы трех его составляющих по осям координат:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

где a_x, a_y, и a_z – проекции вектора, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) соответствующих осей координат.

На рисунке вектор $\vec{a}$, обозначенный жирным шрифтом, выходит из начала координат. Он равен сумме трех векторов, каждый из которых направлен вдоль своей оси координат.

Существуют два разных умножения вектора на вектор: скалярное и векторное.

Результатом скалярного произведения вектора на вектор является **число**, равное произведению модуля первого вектора на модуль второго и на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

или равное сумме одноименных проекций этих векторов на оси координат:

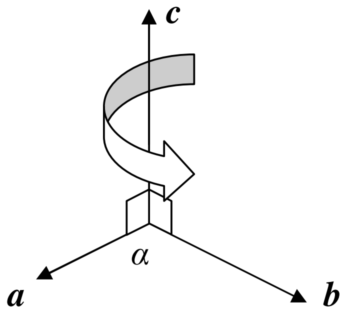
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Скалярное умножение обозначается точкой.

Результатом векторного произведения вектора на вектор является **вектор**. Векторное умножение обозначается косым крестиком. Например, вектор $\vec{c}$ равен векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}.$$

Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и его направление определяется по правилу буравчика (правого винта), как это показано на рисунке, на котором все векторы обозначены жирным шрифтом. Буравчик вращается от первого вектора $\vec{a}$ в сторону второго вектора $\vec{b}$. Если векторы – множители поменять местами, то вектор $\vec{c}$ изменит направление на противоположное.



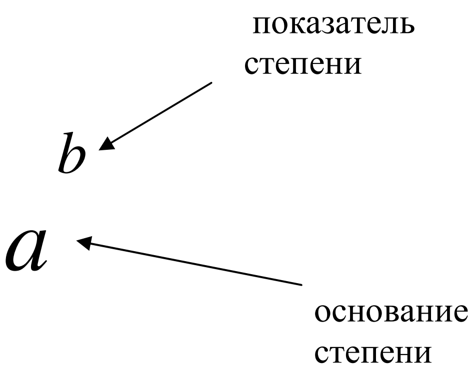
Модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модуля первого вектора на модуль второго и на синус угла между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha.$$

Если два вектора параллельны, то их векторное произведение равно нулевому вектору $\vec{0}$.

СТЕПЕНЬ И ЛОГАРИФМ

Считаем нужным напомнить, что такое степень и логарифм. Степенью называется двухуровневое выражение вида a^b, нижняя и верхняя части которого неравнозначны.



Для удобства обозначим эту степень буквой *y*. Имеем равенство

$$y = a^b.$$

где *a* – основание степени у, а *b* – показатель степени *y*. Чтобы выразить а и *b* из этого равенства, нужно применить разные правила.

Основание *a* степени *y* равно корню из этой степени:

$$a = \sqrt[b]{y},$$

а показатель *b* степени *y* равен логарифму этой степени по основанию *a*:

$$b = \log_a y.$$

Итак, **показатель степени и логарифм степени – это практически одно и то же**.

Чтобы убедиться, проверьте тождество:

$$a^b = a^{\log_a y},$$

и левая и правая части которого равны *y*.