

ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механика – часть физики, изучающая движение и взаимодействие физических тел в пространстве и времени. При этом физика имеет дело не с реальными телами: автомобилями, поездами, пушками, снарядами и т.д., а с физическими моделями, заменяющими эти реальные тела.

Кинематика – часть механики, изучающая характеристики движения: скорость и ускорение физических тел. Динамика – часть механики, изучающая взаимодействие физических тел как причину ускорения.

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

В классической механике пространство считается абсолютным, то есть не зависящим от наличия в нем материи. Пространство рассматривается какместилище для материи. Пространство прямолинейно, трехмерно, бесконечно, безгранично, однородно (одинаково устроено в любой его точке) и изотропно (одинаково устроено по всем направлениям).

Время считается абсолютным, то есть не зависящим от пространства и процессов, происходящих с материей. Время бесконечно и однородно.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если все точки физического тела движутся одинаково (тело при этом не поворачивается), это физическое тело можно заменить моделью – материальной точкой.

Движение материальной точки рассматривается по отношению к некоторой системе отсчета – декартовой системе координат, связанной с какой-нибудь точкой пространства или телом отсчета (см. рисунок).

Некоторая система отсчета $K = \{x, y, z\}$, связанная, например, с Землей, считается неподвижной и называется лабораторной. Любая другая система отсчета $K' = \{x', y', z'\}$, движущаяся относительно системы K , называется подвижной.

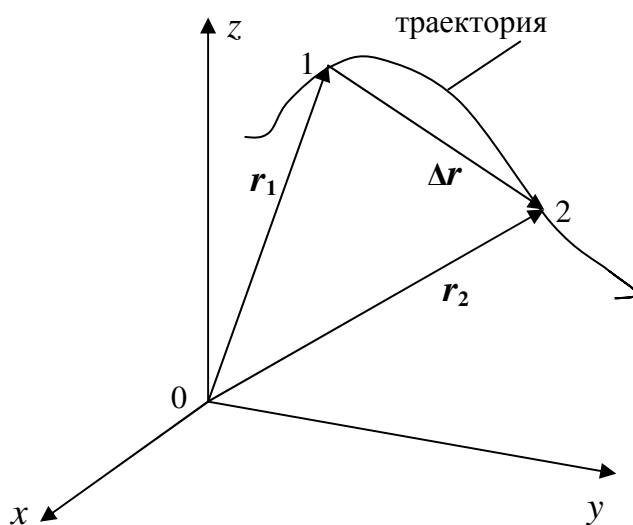
Вдоль осей координат направлены единичные векторы – орты: $\vec{i}$ – вдоль оси x , $\vec{j}$ – вдоль оси y , $\vec{k}$ – вдоль оси z . $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Положение материальной точки в пространстве определяется ее координатами x, y, z в системе отсчета (измеряемыми в метрах) и радиусом – вектором $\vec{r}$, проведенным из начала отсчета в данную точку. Координаты материальной точки являются и координатами (проекциями) радиуса – вектора. Координаты являются явными функциями от времени.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \text{ м.}$$

Пусть в процессе движения материальная точка переместилась из точки 1 с радиусом – вектором $\vec{r}_1$ в точку 2 с радиусом – вектором $\vec{r}_2$. При этом материальная точка совершила перемещение

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$



На рисунке векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, и $\Delta \vec{r}$ обозначены без стрелок жирным шрифтом.

Перемещение в единицу времени есть вектор скорости. **Вектор мгновенной скорости** определяется как производная от радиуса – вектора по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \text{ м/с.}$$

Вектор скорости является явной функцией от времени.

Модуль вектора скорости можно вычислить по формуле

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Любое криволинейное движение можно представить в виде векторной суммы трех прямолинейных движений по осям x , y и z .

Материальная точка движется по некоторой линии – траектории. **Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории.** Длина пройденной траектории называется пройденным путем S и измеряется в метрах (м). Пройденный путь является монотонно возрастающей функцией времени: $S = f(t)$.

Производная от пройденного пути по времени есть модуль мгновенной скорости:

$$|\vec{v}| = \frac{dS}{dt}, \text{ м/с,}$$

где dS – дифференциал (бесконечно малое приращение) пройденного пути S , а dt – дифференциал времени t . Модуль мгновенной скорости является явной функцией от времени.

Чтобы вычислить пройденный путь, нужно проинтегрировать модуль мгновенной скорости по времени от 0 до t :

$$S = \int_0^t |\vec{v}| dt.$$

Для вычисления средней скорости нужно пройденный путь за время t разделить на это время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t}.$$

Если движение происходит в плоскости, достаточно двух осей координат. Имеем $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. Исключив из обоих равенств время t , получим уравнение траектории $y = f(x)$.

Так же для плоской траектории имеем $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $v_y = \frac{dy}{dt}$, откуда

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dx}{dy}.$$

Если вектор скорости в процессе движения изменяется, то материальная точка движется с ускорением. Ускорение – это изменение скорости в единицу времени. **Вектор мгновенного ускорения равен производной от вектора скорости по времени:**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \text{ м/с}^2.$$

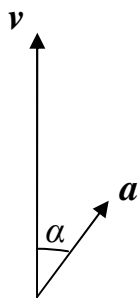
Модуль вектора ускорения можно вычислить по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор $\vec{v}$ может изменяться по величине и по направлению. Если вектор скорости по величине не меняется, то движение равномерное, если меняется – то неравномерное. Если вектор скорости по направлению не меняется, то движение прямолинейное, если меняется, то криволинейное. Таким образом, имеют место четыре вида движений:

- 1) прямолинейное и равномерное, если $\vec{v} = const$;
- 2) прямолинейное и неравномерное;
- 3) криволинейное и равномерное;
- 4) криволинейное и неравномерное.

Если вектор $\vec{a} = const$, то движение материальной точки является равноускоренным. Можно доказать, что траекторией равноускоренного движения является прямая, если вектор $\vec{v}$ параллелен вектору $\vec{a}$, или парабола, если вектор $\vec{v}$ не параллелен вектору $\vec{a}$.



На этом рисунке векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ обозначены жирным шрифтом.

Если вектор $\vec{v}$ параллелен вектору $\vec{a}$, то движение прямолинейное.

Если угол α острый, то движение криволинейное и ускоренное.

Если угол α тупой, то движение криволинейное и замедленное

Различают две основные задачи механики: прямую и обратную.

1. Если известен закон движения, т.е. известны в явном виде зависимости координат материальной точки от времени, то можно путем взятия производных вычислить проекции векторов скорости и ускорения – прямая задача.

2. Если известны начальные координаты материальной точки, вектор начальной скорости, и зависимость вектора ускорения от времени, то можно путем интегрирования по времени получить закон движения, т.е. зависимости координат от времени – обратная задача:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \cdot dt,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} \cdot dt.$$

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Причиной изменения скорости тела является действие силы на это тело. Если на материальную точку никакие силы не действуют, то она движется относительно Вселенной прямолинейно и равномерно или покоится. Связанная с такой точкой система отсчета называется инерциальной системой отсчета. Все инерциальные системы отсчета движутся относительно друг друга и относительно Вселенной прямолинейно и равномерно. Существование инерциальных систем отсчета утверждается первым законом Ньютона.

В природе существует только взаимодействие между телами. На каждую силу действия со стороны одного из взаимодействующих тел на другое следует ответ (реакция) – сила противодействия со стороны этого другого тела на первое. Причем сила – это вектор.

Третий закон Ньютона утверждает, что сила действия и сила противодействия всегда направлены по одной прямой навстречу друг другу и равны по величине:

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}.$$

Каждое физическое тело обладает массой, которая позволяет ему сохранять свое механическое состояние, т.е. двигаться с постоянной скоростью или покоиться. Масса тела – мера его инертности. Чем больше масса тела, тем меньше ускорение при одном и том же воздействии на это тело:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{при} \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|,$$

откуда следует, что вектор силы можно определить как произведение массы тела на вектор его ускорения:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

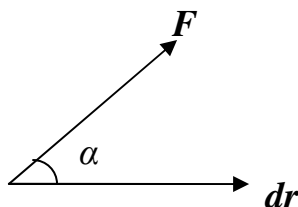
Второй закон Ньютона утверждает, что в инерциальной системе отсчета ускорение тела создается совместным действием всех остальных тел на данное тело. Причем все реальные силы, источником каждой из которых должно быть конкретное тело, складываются как векторы, откуда

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Эта формула является аналитическим выражением второго закона Ньютона.

РАБОТА И МОЩНОСТЬ

Элементарной работой силы $\vec{F}$ называется скалярное произведение этого вектора силы на вектор элементарного перемещения:



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha.$$

δA – бесконечно малая величина, но не дифференциал, поэтому использован символ δ . Как будет показано, работа может зависеть от траектории, в то время как дифференциал никогда не зависит от траектории.

Как известно, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов, откуда

$$\delta A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Чтобы вычислить работу по перемещению материальной точки из точки 1 траектории в точку 2, нужно взять интеграл

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ Дж.}$$

Работа, совершенная в единицу времени называется мощностью, которая измеряется в Ваттах (Вт):

$$P = \frac{A}{t}, \text{ Дж/с} = \text{Вт.}$$

Для вычисления мгновенной мощности нужно взять производную:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Согласно второму закону Ньютона, векторная сумма всех сил сообщает телу ускорение, и скорость тела изменяется. Покажем, что **работа всех сил, действующих на материальную точку, равна изменению ее кинетической энергии.**

$$A = \int_1^2 \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где $E_k = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки.

ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Импульсом материальной точки называется векторная физическая величина, равная произведению массы этой материальной точки на вектор ее скорости:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Покажем, что производная от вектора импульса материальной точки по времени равна векторной сумме сил, действующих на эту материальную точку:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i .$$

Это уравнение также является уравнением второго закона Ньютона.

Чтобы найти изменение импульса, нужно проинтегрировать векторную сумму всех сил по времени:

$$\Delta \vec{p} = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i \cdot dt .$$

Итак, чтобы изменить импульс материальной точки, нужно подействовать на нее некоторой силой в течение длительного времени.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Взаимодействующие между собой тела – материальные точки – составляют систему. Импульс системы материальных точек – это векторная сумма импульсов всех материальных точек, составляющих систему: $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$.

Производная от вектора импульса системы материальных точек по времени равна векторной сумме сил, действующих между материальными точками, составляющими систему – внутренних сил, и сил, действующих на материальные точки, составляющие систему, со стороны тел, не входящих в систему, – внешних сил. Но векторная сумма всех внутренних сил как сил действия и противодействия по третьему закону Ньютона равна нулевому вектору. Итак, получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внтр}} + \sum \vec{F}_{\text{внш}} = \sum \vec{F}_{\text{внш}} ,$$

откуда изменение импульса системы будет равно интегралу от векторной суммы всех внешних сил по времени:

$$\Delta \vec{p} = \int_0^t \sum \vec{F}_{\text{внш}} \cdot dt ,$$

то есть **изменить импульс системы материальных точек могут только внешние силы**, действующие в течение некоторого промежутка времени.

Таким образом, если внешние силы на систему не действуют, а такая система материальных точек называется замкнутой, то импульс такой системы не изменяется, то есть сохраняется.

Мы получили закон сохранения импульса: **импульс замкнутой системы не изменятся, какие бы взаимодействия и превращения ни происходили бы внутри этой замкнутой системы.**

Если внешние силы компенсируют друг друга, то импульс системы также не изменяется.

Если внешние силы на систему все же действуют и не компенсируют друг друга, то в ходе процессов внутри системы, происходящих в течение очень малого промежутка времени, как это бывает при ударе тел или при взрыве, импульс системы также можно считать неизменным, т.е. применить к этой системе закон сохранения импульса.

При абсолютно неупругом ударе двух шаров эти шары как бы слипаются, образовав одно тело. В этом случае уравнение закона сохранения импульса имеет следующий вид:

$$m_1 v_1 \pm m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v,$$

при этом знак «+» ставится, если шары до удара двигались навстречу друг другу, и знак «-», если в одну сторону.

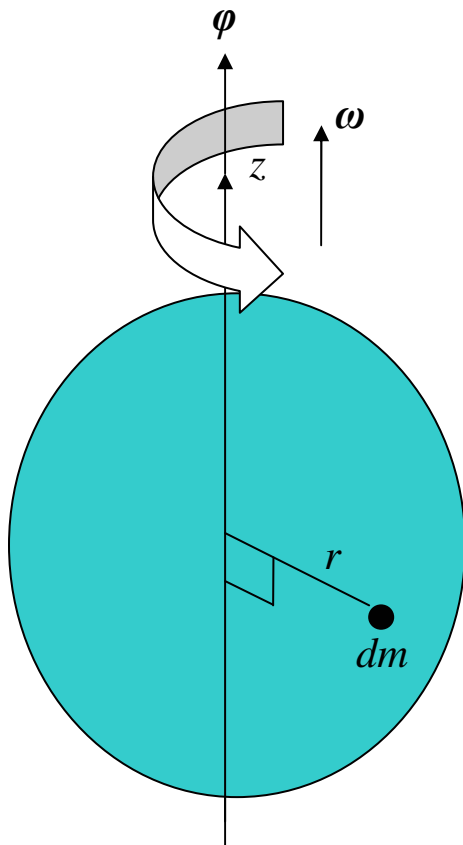
АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО.

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ. УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Если физическое тело поворачивается, и это вращение принципиально важно для конкретной задачи, то это тело нельзя считать материальной точкой. В этом случае используется другая модель – абсолютно твердое тело. В дальнейшем слово «абсолютно» будем опускать.

Пусть некоторое твердое тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω . С помощью правила буравчика определяют вектор $\vec{\phi}$ угла поворо-

та этого тела (на рисунке вектор $\vec{\varphi}$ обозначен жирным шрифтом) Этот вектор параллелен оси вращения. Если он направлен на нас, то тело вращается против часовой стрелки, как это и показано на рисунке. Величина этого вектора измеряется в радианах, т.е. в безразмерных единицах.

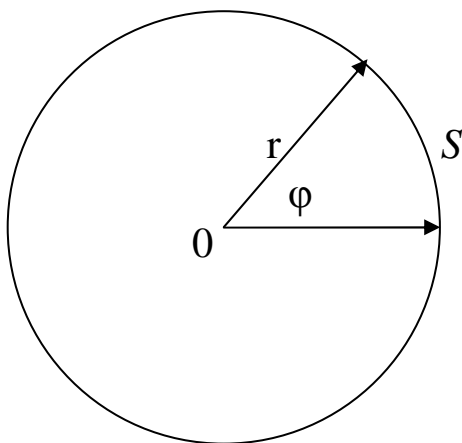


Вектор угловой скорости равен производной от вектора угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \frac{1}{c}.$$

Вектор углового ускорения равен производной от вектора угловой скорости тела по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \frac{1}{c^2}.$$



Если тело вращается вокруг оси Oz , каждая точка этого тела движется по окружности радиуса r , перпендикулярной этой оси, и за некоторое время Δt описывает дугу, длина которой S равна произведению угла поворота тела φ , выраженного обязательно в ради-

анах, на радиус r :

$$S = \varphi \cdot r.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, можно получить связь между линейной скоростью каждой точки тела с его угловой скоростью:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r = \omega \cdot r,$$

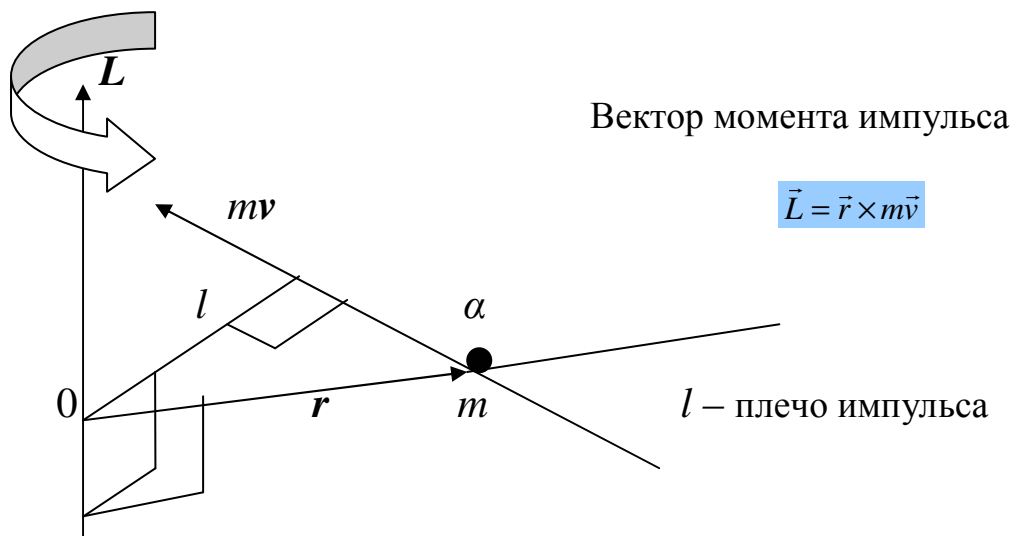
$$v = \omega \cdot r.$$

Линейная скорость движения точки по окружности равна произведению угловой скорости на радиус окружности.

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если материальная точка движется со скоростью $\vec{v}$ относительно некоторой системы отсчета, то она обладает не только импульсом $m\vec{v}$, но и моментом импульса относительно точки O – начала координат.

Момент импульса материальной точки – это вектор, равный векторно-произведению радиуса – вектора $\vec{r}$ материальной точки m на вектор ее импульса $m\vec{v}$:



Вектор $\vec{L}$ момента импульса как результат векторного произведения перпендикулярен векторам – множителям $\vec{r}$ и $m\vec{v}$, а его направление определяется по правилу буравчика (см. рисунок).

Модуль вектора $\vec{L}$ равен произведению модуля вектора $\vec{r}$ на модуль вектора $m\vec{v}$ и на синус угла между ними. На рисунке это угол α .

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |m\vec{v}| \sin \alpha.$$

Как видно из рисунка, l – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, вдоль которой направлен импульс материальной точки. Этот перпендикуляр, а точнее его длина, называется плечом импульса. В образованном прямоугольном треугольнике этот перпендикуляр находится напротив угла, смежного с углом α , следовательно, плечо импульса равно

$$l = |\vec{r}| \sin(180^\circ - \alpha) = |\vec{r}| \sin \alpha.$$

Заменив в уравнении для модуля $\vec{L}$ произведение $|\vec{r}| \sin \alpha$ на l , получим важное правило: **модуль момента импульса материальной точки равен произведению модуля ее импульса на плечо:**

$$|\vec{L}| = mvl.$$

Пусть материальная точка движется по окружности радиуса r вокруг оси Oz , перпендикулярной этой окружности и проходящей через ее центр. В этом случае проекция момента импульса этой материальной точки на ось Oz будет равна произведению ее импульса на радиус окружности. В этом случае радиус будет плечом импульса.

$$L_z = mvr.$$

МОМЕНТ СИЛЫ

Пусть момент импульса материальной точки изменяется со временем. Возьмем производную от момента импульса по времени.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ называется моментом силы $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Окончательно получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

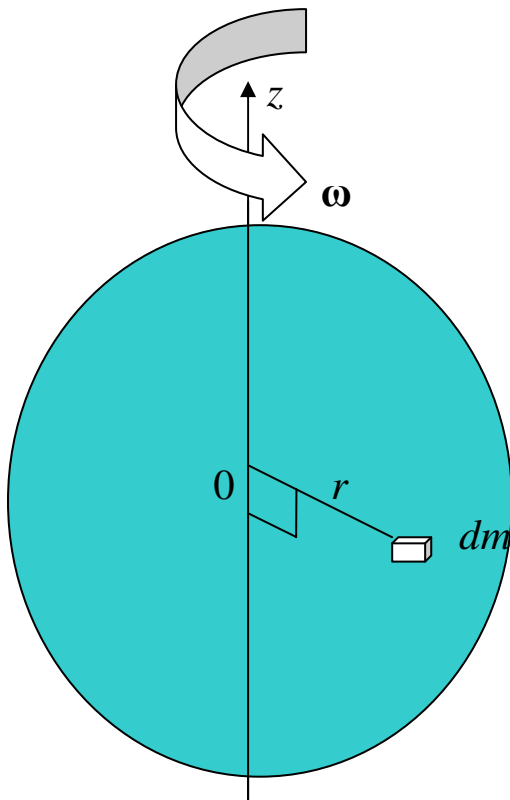
Итак, производная от момента импульса материальной точки по времени равна моменту силы, действующей на эту точку.

Как и в случае вектора момента импульса, можно показать, что модуль вектора момента силы равен произведению силы на ее плечо:

$$M = F \cdot l.$$

Следовательно, чтобы изменить момент импульса материальной точки только силы недостаточно. У этой силы должно быть плечо!

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ



Абсолютно твердое тело состоит из бесчисленного множества материальных точек массы dm . Если это тело вращается вокруг оси Oz , то каждая материальная точка движется по окружности, расположенной в плоскости $(x; y)$, а радиус этой окружности равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Проекция момента импульса твердого тела на ось Oz будет равна сумме проекций моментов импульсов каждой материальной точки тела,

то есть сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Такая сумма является интегралом, который нужно взять по всему объему тела.

$$L_z = \int_V dm \cdot v \cdot r = \int_V dm \cdot \omega \cdot r^2 = \omega \int_V r^2 dm.$$

Последний интеграл называется моментом инерции тела относительно оси Oz :

$$I = \int_V r^2 dm.$$

Величина этого интеграла зависит от распределения массы внутри твердого тела относительно оси вращения. Итак, **момент импульса твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции этого тела относительно этой оси на угловую скорость вращения тела:**

$$L_z = I_z \cdot \omega.$$

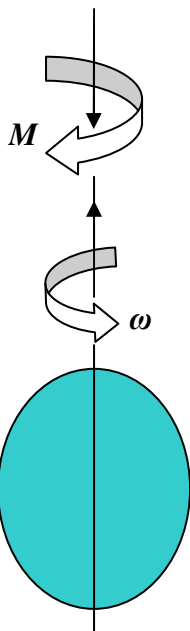
Путем интегрирования по объему тела можно получить формулы для вычисления момента инерции данного тела:

$I = ml^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси, отстоящей от нее на расстоянии l ;

$I = mR^2$ – момент инерции полого цилиндра массы m и радиуса R относительно оси этого цилиндра;

$I = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции сплошного однородного цилиндра массы m и радиуса R относительно оси этого цилиндра.

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА



Пусть момент импульса твердого тела изменяется. Возьмем производную по времени от момента импульса, выраженного через произведение момента инерции тела на угловую скорость:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon.$$

С другой стороны эта производная равна моменту силы, действующей на тело:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Сравнив эти два уравнения, получим

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z$$

– произведение момента инерции твердого тела относительно некоторой оси на его угловое ускорение равно моменту силы относительно этой оси, действующей на тело. Последнее уравнение является уравнением динамики твердого тела или уравнением второго закона Ньютона для твердого тела.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Вектор момента импульса системы тел равен сумме векторов моментов импульса всех тел системы, а проекция вектора момента импульса системы тел на ось Oz равна сумме проекций векторов моментов импульса всех тел системы на эту ось:

$$L_z = \sum_i L_{zi}.$$

Производная по времени от проекции вектора момента импульса системы тел на ось Oz будет равна сумме проекций на ось Oz всех моментов сил, как внутренних, так и внешних:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum (F_z)_{\text{внш}} + \sum (F_z)_{\text{внтр}}.$$

Но все внутренние силы попарно являются взаимно противоположными векторами и имеют одинаковые плечи. Следовательно, суммарный момент всех внутренних сил равен нулю. А это значит, что производная по времени от проекции вектора момента импульса системы тел на ось Oz будет равна сумме проекций на ось Oz только всех моментов внешних сил:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum (F_z)_{\text{внш}}.$$

Следовательно, **только внешние силы могут изменить момент импульса системы тел.**

Таким образом, если внешние силы на систему не действуют, то есть она является замкнутой, то момент импульса такой системы не изменяется, то есть сохраняется.

Мы получили закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы не изменятся, какие бы взаимодействия и превращения ни происходили бы внутри этой замкнутой системы.

Если моменты внешних сил компенсируют друг друга, то момент импульса системы также не изменяется.

Внимание!!! Если известно, что импульс системы сохраняется, а это будет в тех случаях, если система замкнутая или если внешние силы компенсируют друг друга, то **момент импульса сохраняется только, если система замкнутая**. Ведь у внешних сил могут быть разные плечи, и эти моменты не будут компенсировать друг друга. И наоборот, **из сохранения момента импульса системы не всегда следует, что и импульс ее сохраняется**.

Уравнение закона сохранения момента импульса для системы взаимодействующих тел следует записывать следующим образом:

$$L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2,$$

где L_1 и L_2 – моменты импульса тел системы до взаимодействия, а L'_1 и L'_2 – моменты импульса этих тел после взаимодействия.

Уравнение закона сохранения момента импульса для твердого тела следует записывать следующим образом:

$$\omega_1 I_1 = \omega_2 I_2,$$

где $\omega_1 I_1$ – момент импульса тела до взаимодействия, а $\omega_2 I_2$ – после взаимодействия.

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Спутник движется под действием гравитационной силы вокруг некоторого центрального массивного тела по эллипсу. При этом сила гравитационного притяжения все время направлена к центру. Поэтому она не имеет плеча и не может изменить момент импульса спутника. Таким образом, к спутнику можно применить закон сохранения момента импульса:

$$\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Выражение для кинетической энергии вращающегося абсолютно твердого тела получим путем интегрирования по всему объему тела выражения для кинетической энергии материальной точки массы dm – маленького кусочка твердого тела:

$$E_k = \int_V \frac{dm \cdot v^2}{2} = \int_V \omega^2 r^2 \cdot dm = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Если твердое тело и движется поступательно, и вращается, то его кинетическая энергия состоит из двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

В заключение приведем сравнительную таблицу пар физических величин, являющихся аналогами в кинематике и динамике материальной точки и кинематике и динамике абсолютно твердого тела.

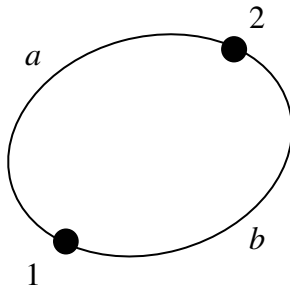
Материальная точка		Твердое тело	
Масса	m	Момент инерции	I
Скорость	v	Угловая скорость	ω
Ускорение	a	Угловое ускорение	ε
Импульс	mv	Момент импульса	$I\omega$
Уравнение динамики	$ma = F$	Уравнение динамики	$I\varepsilon = M$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{I\omega^2}{2}$

СИЛОВОЕ ПОЛЕ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Материальная точка, оказавшаяся в силовом поле, обладает в каждой точке поля потенциальной энергией и подвергается действию консервативной силы со стороны поля, «толкающей» эту материальную точку в сторону уменьшения энергии – принцип минимума энергии. Причем работа по пере-

мещению материальной точки осуществляется за счет потенциальной энергии E_p .

Сила называется консервативной, если работа этой силы не зависит от траектории.



Так работа силы $\vec{F}_{\text{кнс}}$ на пути 1 – а – 2 равна работе этой силы на пути 1 – b – 2:

$$\int_{1-a-2} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} = \int_{1-b-2} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r}.$$

Из определения консервативной силы следует, что работа консервативной силы по любой замкнутой траектории равна нулю.

$$\oint_l \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Докажем это:

$$\oint_l \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} = \int_{1-a-2} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} + \int_{2-b-1} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} = \int_{1-a-2} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} - \int_{1-b-2} \vec{F}_{\text{кнс}} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Такой интеграл от вектора по замкнутой траектории называется циркуляцией этого вектора. Здесь это циркуляция вектора силы.

Консервативными являются гравитационная, кулоновская силы и силы абсолютной упругости.

Потенциальная энергия как функция координат $E_p = f(x, y, z)$ – представляет собой потенциальное числовое поле.

Вектор силы как функция координат

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

– векторное поле.

Поскольку работа консервативной силы совершается за счет потенциальной энергии, имеем

$$\delta A = -dE_p.$$

Дифференциал потенциальной энергии имеет вид:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot dz.$$

Сравнив его с выражением для элементарной работы

$$\delta A = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz,$$

получим формулы связи консервативной силы с потенциальной энергией в дифференциальном виде:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx}, \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy}, \\ F_z = -\frac{dE_p}{dz}, \end{cases} \quad \vec{F} = -\text{grad}E_p.$$

где $\text{grad}E_p$ – вектор, называемый градиентом потенциальной энергии,

и в интегральном виде:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p1} - E_{p2}.$$

В случае так называемого центрального поля сил консервативная сила и потенциальная энергия зависят только от радиуса, т.е. от расстояния от центра поля. В этом случае

$$F = -\frac{dE_p}{dr}, \quad E_p = -\int F \cdot dr + \text{const}.$$

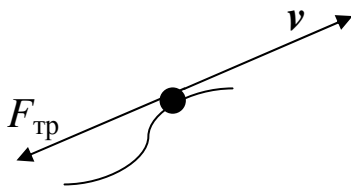
МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Кинетическая и потенциальная энергии вместе составляют механическую энергию тела.

Работа консервативных сил не приводит к изменению механической энергии, «сохраняют» ее. Поэтому эти силы так и называются.

ДИССИПАТИВНЫЕ СИЛЫ

Диссипативными называются силы, в результате работы которых механическая энергия тел превращается в их внутреннюю (тепловую) энергию. Диссипативными являются все силы трения.



Эти силы всегда направлены прямо противоположно вектору скорости. Их работа всегда зависит от траектории движения тела.

$$\delta A_{\text{дсп}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F \cdot dr.$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Среди сил, действующих на тело, есть внутренние консервативные, внутренние диссипативные и внешние силы. Работа A всех сил будет равна сумме работы $A_{\text{внтр.кнс}}$ внутренних консервативных сил, работы $A_{\text{внтр.дсп}}$ внутренних диссипативных сил и работы $A_{\text{внш}}$ внешних сил. Работа всех сил равна изменению кинетической энергии тела. Работа внутренних консервативных сил равна со знаком «-» изменению его потенциальной энергии. Таким образом, получим:

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} + A_{\text{внтр.дсп}} + A_{\text{внш}}$$

или

$$(E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1}) = A_{\text{внтр.дсп}} + A_{\text{внш}} -$$

закон сохранения и превращения энергии: изменение механической энергии системы тел равно сумме работ внутренних диссипативных и внешних сил.

Работа диссипативных сил отрицательна и всегда приводит к уменьшению механической энергии путем ее превращения во внутреннюю.

Механическая энергия замкнутой консервативной системы тел не изменяется.

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА – ВРЕМЕНИ

Все основные законы сохранения связаны со свойствами пространства и времени:

- закон сохранения импульса связан с однородностью пространства;
- закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства;
- закон сохранения энергии связан с однородностью времени.

Однородность и изотропность представляют собой разновидности симметрии.