

Боднарь О.Б.

# **Физика**

## **Часть III**

### **«Элементы квантовой механики»**

лекции и решения задач

Москва, 2015

## Квантовые свойства электромагнитного излучения

### Лекция 2. Квантовые свойства электромагнитного излучения

#### 2.1. Энергия и импульс фотона

В 1905 г. Эйнштейн пришел к выводу, что излучение испускается, распространяется и поглощается в виде квантов. Такой подход объясняет экспериментальные факты (фотоэффект, эффект Комптона, и др.), которые не могла объяснить классическая электродинамика, исходившая из волновых представлений о свойствах излучения.

Согласно Эйнштейну, распространение света следует рассматривать как поток локализованных в пространстве дискретных частиц, движущихся со скоростью распространения света в вакууме. В 1926г. эти частицы получили название *фотонов*. Фотоны обладают всеми свойствами частицы (корпускулы).

$$1. \text{ Энергия фотона} \quad \varepsilon = h\nu = \hbar\omega = h\frac{c}{\lambda}, \quad (2.1)$$

где  $h=6.6\cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $\hbar=h/2\pi=1.055\cdot 10^{-34}$  Дж·с также постоянная Планка,  $\omega=2\pi\nu$  – круговая частота.

**2. Импульс фотона:** Энергия релятивистской частицы  $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ . У фотона  $m=0$ , поэтому импульс фотона

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda. \quad (2.2)$$

Энергия фотона увеличивается с ростом частоты (или с уменьшением длины волны). Так фотон фиолетового света ( $\lambda=0.38$  мкм) имеет большую энергию, чем фотон красного света ( $\lambda=0.77$  мкм).

#### 2.2. Внешний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

Испускание электронов с поверхности вещества под действием света называется *внешним фотоэффектом*.

На рис. 2 представлена схема, использовавшаяся А.Г. Столетовым для исследования внешнего фотоэффекта. Плоский конденсатор, одной из пластин которого служила медная сетка *C*, а в качестве второй цинковая пластина *K*, был включен через гальванометр *G* в цепь аккумуляторной батареи. При освещении отрицательно заряженной пластины *K* в цепи возникал электрический ток, называемый *фототоком*.

На рис. 3 приведены зависимости фототока *I* от напряжения *U* между электродами при различных интенсивностях света (энергетической освещенности).

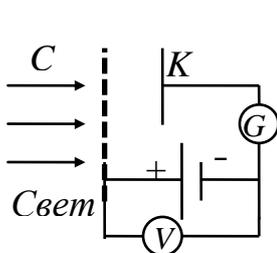


Рис. 2

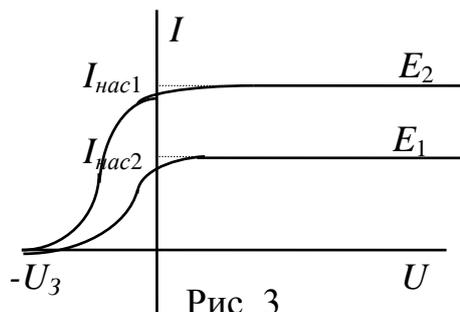


Рис. 3

Столетов установил следующие законы внешнего фотоэффекта:

1. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой света и не зависит от его интенсивности.
2. Для каждого вещества (катода) существует красная граница фотоэффекта, т.е. минимальная частота  $\nu_0$ , при которой еще возможен фотоэффект.

3. Фототок насыщения пропорционален энергетической освещенности  $E$  катода.

При некотором напряжении  $U_3$  (рис.3) фототок обращается в нуль, т.е. фотоэлектроны не достигают анода. В этом случае тормозящее внешнее поле уменьшает кинетическую энергию фотоэлектронов до нуля, совершая работу

$$eU_3 = mv_{\max}^2/2, \quad (2.4)$$

где  $e$  и  $m$  – соответственно заряд и масса электрона.

Первые два закона противоречат классической теории, согласно которой энергия (а, следовательно, и скорость) фотоэлектронов, вырванных из катода, должна зависеть только от интенсивности падающего света.

Внешний фотоэффект объясняется квантовой теорией. Электрон поглощает фотон и получает целиком его энергию  $\varepsilon = h\nu$ , которая расходуется на совершение работы выхода из катода и на сообщение электрону кинетической энергии:

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + mv_{\max}^2/2 = A_{\text{ВЫХ}} + eU_3. \quad (2.5)$$

Это закон называется *уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*.

Из (2.5) следуют все законы Столетова. В частности, максимальная начальная скорость электронов зависит только от частоты  $\nu$  и материала катода ( $A_{\text{ВЫХ}}$ ). Красная граница  $\nu_0$  соответствует  $v_{\max} = 0$

$$h\nu_0 = A_{\text{ВЫХ}}, \quad \nu_0 = A_{\text{ВЫХ}}/h. \quad (2.6)$$

При  $\nu > \nu_0$  ( $\lambda < \lambda_0$ ) фотоэффект наблюдается, при  $\nu < \nu_0$  ( $\lambda > \lambda_0$ ) – не наблюдается.

### 2.3. Эффект Комптона

Заключается в увеличении длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии на свободных электронах вещества (Рис.4). Это явление можно объяснить, рассматривая рассеяние как упругое соударение двух частиц – фотона и электрона, при котором выполняются законы сохранения импульса и энергии

$$\vec{p}_\phi + \vec{p}_e = \vec{p}'_\phi + \vec{p}'_e, \quad (2.7)$$

$$h\nu + E = h\nu' + E', \quad (2.7')$$

где  $p_\phi$  и  $p'_\phi$ ,  $p_e$  и  $p'_e$  – импульсы фотона и электрона до и после соударения:  $p_\phi = h/\lambda$ ,  $p'_\phi = h/\lambda'$  (2.2),  $p_e = 0$  (до соударения электрон покоился),  $\vec{p}'_e = \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ;

$h\nu$  и  $h\nu'$ ,  $E$  и  $E'$  – энергия фотона и электрона до и после соударения:  $h\nu = hc/\lambda$ ,  $h\nu' = hc/\lambda'$  (6.1),  $E = mc^2$ ,  $E' = c\sqrt{p'^2 + m^2c^2}$ . После столкновения с рентгеновским квантом скорость электрона может быть велика, поэтому используются релятивистские соотношения для импульса и энергии.

Решение системы (2.7), (2.7') позволяет определить изменение длины волны рентгеновского излучения при рассеянии на веществе:

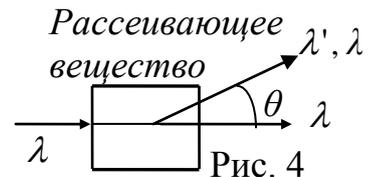
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_K(1 - \cos\theta) = 2\lambda_K \sin^2(\theta/2), \quad (2.8)$$

где  $\lambda_K = h/(m_e c)$  – комптоновская длина волны,  $m_e$  – масса электрона,  $\lambda_K = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0.0243 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ),  $\theta$  – угол рассеяния рентгеновского фотона.

Рентгеновские лучи рассеиваются не только на свободных электронах, но и на атомах вещества. Масса атома намного превышает массу электрона, следовательно в этом случае  $\lambda'_K = h/(m_a c) \ll \lambda_K = h/(m_e c)$  и смещение длины волны (2.8) мало.

### 6.5. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения

Свет одновременно обладает свойствами непрерывных электромагнитных волн (интерференция, дифракция, поляризация) и свойствами дискретных фотонов



(теплового излучение, фотоэффект, эффект Комптона). В этом заключается корпускулярно-волновой дуализм (двойственность) электромагнитного излучения.

Ниже будет показано, что корпускулярно-волновыми свойствами обладают и элементарные частицы.

### Основные формулы и решение задач

- Энергия и импульс фотона

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega = h\frac{c}{\lambda}, \quad p = E/c = h\nu/c = h/\lambda. \quad (1)$$

- Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + m\nu_{\text{max}}^2/2 = A_{\text{ВЫХ}} + eU_3, \quad (2)$$

где  $h\nu$  – энергия падающего на поверхность вещества фотона,  $A_{\text{ВЫХ}}$  – работа выхода электрона,  $U_3$  – задерживающее напряжение, при котором прекращается фототок. Работа выхода  $A_{\text{ВЫХ}}$  численно равна минимальной энергии фотона, при которой еще возможен фотоэффект:

$$A_{\text{ВЫХ}} = h\nu_0 = hc/\lambda_0, \quad (3)$$

где  $\nu_0, \lambda_0$  – красная граница фотоэффекта.

- Изменение длины рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{\text{к}}(1 - \cos\theta) = 2\lambda_{\text{к}}\sin^2(\theta/2), \quad (4)$$

где  $\lambda_{\text{к}} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 0.0243 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ),  $\theta$  – угол рассеяния фотона.

*Пример 2.1* Определить длину волны  $\lambda$  и импульс  $p$  излучения, кванты которого имеют ту же энергию, что и электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов  $U = 100 \text{ В}$ .

*Решение:* 1) При прохождении частицы с зарядом  $q$  ускоряющей разности потенциалов  $U$  электрическое поле совершает работу  $A = qU$ . Работа поля равна изменению кинетической энергии частицы. В нашем случае  $q = e$ , начальная скорость частицы принимается равной нулю, следовательно

$$eU = \frac{m\nu^2}{2}. \quad (1)$$

По условию задачи: 
$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{m\nu^2}{2}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1): 
$$eU = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{откуда } \lambda = \frac{hc}{eU}. \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^2} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

2) Импульс фотона  $p = h/\lambda$ . 
$$p = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1,25 \cdot 10^{-6}} = 5,3 \cdot 10^{-28} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

*Примечание:* Скорость ускоренного электрона много меньше скорости света, поэтому при решении применяются законы классической механики.

*Пример 2.2* Сколько фотонов с длиной волны  $\lambda = 0,66 \text{ мкм}$  ( $\lambda = 0,66 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ) содержит световой импульс длительностью  $t = 1 \text{ мкс}$  ( $t = 10^{-6} \text{ с}$ ) и мощностью  $P = 2 \text{ мВт}$  ( $P = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$ )?

*Решение:* Выразим энергию импульса через мощность и время  $W = Pt$ . (1)

Согласно квантовым представлениям о природе электромагнитного излучения световой импульс можно представить как совокупность частиц – фотонов, энергия импульса равна произведению энергии фотона  $\varepsilon$  на число фотонов  $N$ :  $W=N\varepsilon= Nh\frac{c}{\lambda}$ . (2)

Приравнивая (1) и (2)  $Pt= Nh\frac{c}{\lambda}$ , откуда  $N = \frac{Pt\lambda}{hc}$ . (3)

Число фотонов  $N = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot 0.66 \cdot 10^{-6}}{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 66 \cdot 10^6$ .

**Пример 2.3** Натрий освещается монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda=400$  нм ( $0.4 \cdot 10^{-6}$  м). Красная граница фотоэффекта для натрия  $\lambda_0=594$  нм ( $0.594 \cdot 10^{-6}$  м) Определить: 1) Работу выхода электрона  $A_{ВЫХ}$ ; 2) наименьшее задерживающее напряжение  $U_3$ , при котором фототок прекратится; 3) максимальную скорость фотоэлектронов.

**Решение:** 1) Работа выхода  $A_{ВЫХ}$  численно равна минимальной энергии фотона, при которой еще возможен фотоэффект:

$$A_{ВЫХ} = h\nu_0 = hc/\lambda_0, \quad A_{ВЫХ} = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 0.594 \cdot 10^{-6} = 3.3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

В квантовой механике часто применяется внесистемная единица измерения энергии - электрон – вольт (эВ) . 1 эВ численно равен энергии, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов 1 В. В этом случае работа поля равна  $A=qU=eU$  ( $e=1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона), т.е.  $1\text{эВ}=1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1=1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Таким образом, вычисленная ранее работа выхода  $A_{ВЫХ} = \frac{3.3 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 2.1 \text{ эВ}$

2) Из уравнения Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$eU_3 = h\nu - A_{ВЫХ} = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_0}, \text{ откуда } U_3 = \frac{hc}{e} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right).$$

$$U_3 = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19}} \left( \frac{1}{0.4 \cdot 10^{-6}} - \frac{1}{0.594 \cdot 10^{-6}} \right) = 1 \text{ В}$$

3) Из уравнения Эйнштейна  $h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_0} + m v_{\max}^2 / 2$  максимальная скорость

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right]}, \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9.1 \cdot 10^{-31}} \left( \frac{1}{0.4 \cdot 10^{-6}} - \frac{1}{0.594 \cdot 10^{-6}} \right)} = 6 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

**Пример 2.4.** При увеличении частоты излучения, вызывающего фотоэффект в 1.5 раза  $\nu_2=1.5\nu_1$ , задерживающая разность потенциалов увеличилась в два раза  $U_2=2U_1$ . Найдите конечную частоту  $\nu_2$ , если красная граница фотоэффекта  $\nu_0=10^{15}$  Гц.

**Решение:** Уравнения Эйнштейна частот фотонов  $\nu_1$  и  $\nu_2$ :

$$h\nu_1 = h\nu_0 + eU_1, \quad (1)$$

$$h\nu_2 = h\nu_0 + eU_2. \quad (2)$$

Умножим левую и правую часть (1) на два и вычитая из (1) (2), имеем

$$h(2\nu_1 - \nu_2) = h\nu_0. \quad (3)$$

Подставляя в (3) данные задачи  $\nu_2=1.5\nu_1$ , получим  $0.5\nu_2 = \nu_0$ ,  $\nu_2=2 \cdot 10^{15}$  Гц.

*Пример 2.5.* Определить энергию электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с длиной волны  $\lambda=100 \text{ нм}$  ( $10^{-10} \text{ м}$ ) был рассеян на угол  $\theta=180^\circ$ .

*Решение:* Длина волны рассеянного рентгеновского  $\lambda'$  фотона согласно (6.15)

$\lambda'=\Delta\lambda+\lambda=\lambda_{\kappa}(1-\cos\theta)+\lambda$ , производя расчеты  $\lambda'=2.43\cdot 10^{-12} (1-(-1))+ 10^{-10} =1.05\cdot 10^{-10} \text{ м}$

Энергия  $E'$  электрона отдачи равна разности энергий падающего и рассеянного фотонов (6.14')

$$E' = h\nu - h\nu' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right), \text{ подставляя}$$

полученное выше значение  $\lambda'$ , имеем

$$E' = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \left( \frac{1}{10^{-10}} - \frac{1}{1.05 \cdot 10^{-10}} \right) = 0.947 \cdot 10^{-16} \text{ Дж или } E' = 0.58 \text{ кэВ}$$