

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
имени И.М.Губкина**

Д.Д.Ходкевич, С.Г.Серебряков

**АТОМНАЯ ФИЗИКА
И ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Справочное пособие

Москва 2004

Тепловое излучение – излучение телом электромагнитных волн, происходящее при тепловом движении его атомов и молекул, т.е. за счет его внутренней энергии. Электромагнитные волны излучаются зарядами, движущимися с ускорением. При тепловом движении (при температуре выше 0 К) положительные и отрицательные заряды в молекулах движутся с ускорением: при взаимодействии молекул до и после столкновения в газах, при скачкообразном изменении положения равновесия молекул в жидкостях и при колебательном движении в жидкостях и твердых телах. Поэтому тепловое излучение наблюдается при любой температуре и характеризуется сплошным спектром (непрерывный ряд длин волн) с максимумом интенсивности при некоторой длине волны. Положение максимума спектра зависит от температуры.

Тепловое излучение является **равновесным**, т.е. находящимся в термодинамическом равновесии с веществом, при котором распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны.

Такое излучение устанавливается в замкнутой теплоизолированной системе, все тела которой находятся при одной и той же температуре. При равновесии энергия, расходуемая каждым из тел системы на тепловое излучение, компенсируется путем поглощения этим телом такого же количества энергии падающего на него излучения. Если нагретые (излучающие) тела поместить в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой, то через некоторое время (в результате непрерывного обмена энергией между телами и излучением, заполняющим полость) наступит равновесие, т.е. каждое тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать. Свойства равновесного теплового излучения полностью определяются температурой, равной температуре, находящихся с ним в равновесии тел и не зависят от их материала.

Основные характеристики теплового излучения.

Излучение характеризуют его энергией W .

Поток излучения Φ_e —отношение энергии излучения ко времени t , за которое оно произошло:

$$\Phi_e = \frac{W}{t} \quad \text{или} \quad \Phi_e = \frac{dW}{dt} \quad (\text{Мощность излучения}).$$

Плотность потока энергии – физическая величина численно равна потоку энергии (энергии, переносимой в единицу времени) через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия.

Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

$$j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt}$$

Энергетическая светимость (R_e) тела – отношение потока излучения, испускаемого телом к площади S поверхности излучающего тела. $R_e = \frac{\Phi_e}{S}$.

Измеряется средней мощностью излучения единицей площади светящейся поверхности. $[R_e] = \text{Вт/м}^2$.

Энергетическая светимость (интегральная испускательная способность) – энергия электромагнитных волн, излучаемая в единицу времени единицей поверхности тела во всем диапазоне длин волн по всем направлениям, т.е. в пределах телесного угла 2π .

Энергетическая светимость зависит от температуры тела.

Мощность излучения тела определяется выражением $P = R_e S$, где R_e – энергетическая светимость тела, S – площадь его поверхности.

Спектральная плотность энергетической светимости r_{λ} (испускательная способность) – отношение доли энергетической светимости dR_{λ} , приходящейся на узкий интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ к величине этого интервала: $r_{\lambda T} = \frac{dR_e}{d\lambda}$.

Длина электромагнитной волны λ , ее частота ν и скорость распространения связаны соотношением $c = \lambda \cdot \nu$, поэтому испускательную способность можно определить, как отношение доли энергетической светимости dR_{ν} , приходящейся на узкий интервал частот от ν до $\nu + d\nu$ или от ω до $\omega + d\omega$ к величине интервала $d\nu$ или $d\omega$ ($\omega = 2\pi\nu$)

$$r_{\omega T} = \frac{dR_{\omega}}{d\omega}, \quad r_{\nu T} = \frac{dR_{\nu}}{d\nu}.$$

Если интервалы $d\lambda$, $d\nu$ и $d\omega$ относятся к одному к одному и тому же участку спектра, то величины dR_λ , dR_ν и dR_ω должны совпадать и отсюда $r_{\omega T} = r_{\lambda T} \cdot \frac{2\pi c}{\omega^2}$, $r_{\lambda T} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot r_{\nu T}$.

Спектральная плотность энергетической светимости (испускающая способность) численно равна мощности излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот или длин волн единичной ширины при заданной температуре T :

$$r_{\nu T} = \frac{dW_{\text{изл}}}{d\nu},$$

где $dW_{\text{изл}}$ – энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени с единицы площади поверхности тела в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. $[r_{\nu T}] = \text{Дж/м}^2$.

Энергетическая светимость, соответствующая интервалу длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ ($\nu, \nu + d\nu$) равна $dR_{\lambda T} = r_{\lambda T} d\lambda$, где $r_{\nu T}$ – спектральная плотность энергетической светимости тела, $[r_{\lambda T}] = \text{Дж/м}^3$, или $dR_{\nu T} = r_{\nu T} d\nu$.

Зная спектральную плотность энергетической светимости, можно найти энергетическую светимость тела: $R_e = \int_0^\infty r_{\nu T} d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda T} d\lambda = \int_0^\infty r_{\omega T} d\omega$, где интегрирование производится по всем частотам (длинам волн).

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется **поглощательной способностью** $a_{\lambda T}$.

Поглощательная способность тела – физическая величина, равная доле потока энергии излучения, падающего на единицу площади поверхности тела за единицу времени, которая поглощается телом (для узкого интервала длин волн или частот):

$$a_{\nu T} = \frac{d\Phi_{\text{погл}}}{d\Phi_{\text{пад}}},$$

где $d\Phi_{\text{погл}}$ – поток энергии, поглощаемый телом, $d\Phi_{\text{пад}}$ – поток энергии, падающий на тело.

Для потоков монохроматического излучения (фиксированная длина волны λ) это отношение определяет монохроматический коэффициент поглощения.

$a_{\lambda T}$ зависит от природы тела, состояния его поверхности, температуры и различается для излучений с различными длинами волн, поэтому ее относят к определенной температуре T и узкому интервалу длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ (или частот $\nu, \nu + d\nu$). $a_{\lambda T}$ безразмерная величина.

Абсолютно черное тело (АЧТ)– тело, поглощательная способность которого равна единице для всех длин волн или частот: $a_{\lambda T} \equiv 1$. АЧТ поглощает всю падающую на него энергию.

Модель АЧТ—замкнутая зеркальная внутри полость с небольшим отверстием. Практически все лучи, попадающие в полость через отверстие, в результате многократных отражений от внутренних стенок оказываются поглощенными.

Серое тело—тело, для которого поглощательная способность меньше единицы, но постоянна для всех длин волн (частот) $a_{\lambda T} = a_\lambda < 1$. Для серых тел энергетическая светимость $R' = a_T R^*$, где R^* – энергетическая светимость абсолютно черного тела.

Закон Кирхгофа

Если система состоит из нескольких тел, нагретых до различной температуры, то спустя некоторое время произойдет выравнивание температур: горячие тела, излучая, передадут холодным энергии больше, чем получают от них, а холодные тела поглотят больше энергии, чем отдадут при излучении. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока не наступит равновесное состояние.

В состоянии термодинамического равновесия у тел, обменивающихся энергией лишь путем излучения и поглощения, отношение спектральной плотности энергетической светимости (излучательной способности) любого тела к его поглощательной способности оказывается универсальной функцией длины волны и температуры:

$$\frac{r_{\lambda} T}{a_{\lambda} T} = f(\lambda, T)$$

Поскольку для АЧТ поглощательная способность равна единице, то стоящая справа функция есть не что иное, как **излучательная способность АЧТ**, которую обозначим $r_{\lambda T}^*$:

$$\frac{r_{\lambda} T}{a_{\lambda} T} = r_{\lambda}^*(T)$$

Закон Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности при данной температуре одинаково для всех тел и равно излучательной способности АЧТ.

При одной и той же температуре АЧТ обладает самой большой излучательной способностью и энергетической светимостью.

Закон Стефана–Больцмана. Закон Вина.

Зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны называют **спектром излучения тела**.

На рисунке 1 представлены экспериментальные кривые зависимости излучательной способности (спектральной плотности энергетической светимости) АЧТ $r_{\lambda T}^*$ АЧТ от длины волны при постоянных температурах.

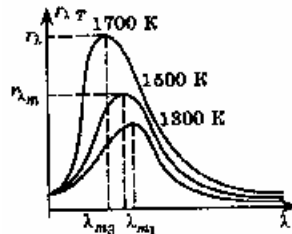


Рис.1

Как видно из рис.1 излучательная способность АЧТ $r_{\lambda T}^*$ возрастает с повышением температуры во всем диапазоне длин волн, а ее максимум с увеличением температуры смещается в область более коротких волн. Площадь под кривой равна энергетической светимости АЧТ R^* .

Закон Стефана–Больцмана: энергетическая светимость АЧТ R^* пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры $R^* = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$ — *постоянная Стефана-Больцмана*.

Для серого тела $R' = a_T \sigma T^4$, где a_T — поглощательная способность (степень черноты или коэффициент теплового излучения поверхности) серого тела.

Закон смещения Вина: выражает зависимость положения максимума функции $r_{\lambda T}^*$ от температуры: $\lambda_m = \frac{b}{T}$, где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ — *постоянная Вина*, λ_m — длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости АЧТ.

Этот закон выполняется и для серых тел.

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости АЧТ от температуры: $r_{\lambda T}^* = C' T^5$, где $C' = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-5}$ — *постоянная*.

Формула Рэлея–Джинса для спектральной плотности энергетической светимости АЧТ.

Рэлей и Джинс попытались получить вид функции $r_{\lambda T}^*$ в рамках классической статистической физики, в соответствии с которой тело испускает и поглощает энергию непрерывно. Вычисления привели к формуле: $r_{\nu, T}^* = \frac{2 \pi \nu^2}{c^2} kT$, где kT — средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν , k — *постоянная Больцмана*, T — термодинамическая температура, c — скорость света в вакууме.

Полученная зависимость хорошо согласуется с экспериментом при малых частотах (больших длинах волн), т.е. при условии $h\nu \ll kT$, но абсолютно неверна при больших. Полученная функция не имеет максимума; она монотонно возрастает, и интеграл от этой функции, т.е. полная энергия излучения, равен бесконечности. Эта ситуация стала одним из признаков глубокого кризиса классической физики и была названа современниками **ультрафиолетовой катастрофой**.

В области больших частот хорошее согласие с опытом дает формула Вина. В современных обозначениях она может быть записана в виде: $r_{\lambda T}^* = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$, где h – постоянная Планка, kT – средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν , k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура, c – скорость света в вакууме.

Формула Планка.

Теоретическую зависимость спектральной плотности энергетической светимости АЧТ от длины волны и температуры, согласующуюся с опытными данными, удалось получить М. Планку в 1900 году. Для этого ему пришлось предположить, что электромагнитная энергия излучается АЧТ порциями (квантами), энергия которых кратна частоте излучения $E = h\nu$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – коэффициент пропорциональности, получивший название постоянной Планка, ν – частота излучения.

Формула Планка имеет вид:

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad r_{\omega T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad r_{\lambda T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \quad r_{\lambda T} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{C_2}{T\lambda}} - 1},$$

где $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-16}$ Вт·м²; $C_2 = 1,44 \cdot 10^{-2}$ м·К, $r_{\lambda T}, r_{\nu T}, r_{\omega T}$ – спектральные плотности энергетической светимости АЧТ, λ – длина волны, ν – линейная частота, ω – циклическая частота, c – скорость света в вакууме, k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура, h – постоянная Планка ($h = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

Средняя мощность излучения в интервале длин волн $\Delta\lambda$: $P = r_{\lambda T}^* \cdot \Delta\lambda \cdot S$, здесь $r_{\lambda T}^*$ – спектральная плотность энергетической светимости АЧТ, S – площадь излучающей поверхности.

Фотоэлектрический эффект – вырывание электронов из вещества под действием света (излучения). Если электроны, вылетают за пределы вещества, то фотоэффект называют **внешним**. Он наблюдается главным образом у металлов. **Внутренний фотоэффект** – явление, при котором оторванные от своих атомов или молекул электроны остаются внутри освещаемого вещества в качестве свободных, а электропроводность тела изменяется. Вылетающие с поверхности металла электроны называют **фотоэлектронами**, а регистрируемый в цепи ток – **фототоком**.

В результате многочисленных опытов Столетов установил следующие **законы фотоэффекта**.

1. Сила фототока насыщения, возникающего при освещении монохроматическим светом, пропорциональна световому потоку, падающему на катод.
2. Скорость фотоэлектронов увеличивается с ростом частоты (с уменьшением длины волны) падающего света и не зависит от интенсивности светового потока.
3. Независимо от интенсивности светового потока фотоэффект начинается только при определенной для данного металла минимальной частоте (максимальной длине волны) света, называемой красной границей фотоэффекта.

Законы фотоэффекта не смогли объяснить в рамках классической теории. А. Эйнштейн предположил, что электроны в металле поглощают свет квантами $h\nu$. Часть энергии поглощенного кванта (который перестает существовать), полученная электроном, равная **работе выхода** A_B , затрачивается на то, чтобы электрон покинул тело (работа выхода – это та наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы удалить его из тела в вакуум). Работа выхода электрона из металла зависит от природы вещества и состояния его поверхности.

Если электрон находится не у самой поверхности металла, а на некоторой глубине, то часть энергии может быть потеряна вследствие столкновений в веществе. Оставшаяся энергия переходит в кинетическую энергию электрона, покинувшего вещество. Для электрона, находящегося у самой поверхности кинетическая энергия будет максимальной. Тогда закон сохранения энергии для фотоэффекта (формула Эйнштейна) имеет вид:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A_B + \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2}.$$

Здесь A_B – работа выхода электрона из вещества, $\frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} = T_{\text{макс}}$ – максимальная кинетическая энергия электрона, $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ – энергия поглощенного кванта, h – постоянная Планка, m – масса электрона.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона определяется по формуле классической механики, если фотоэффект вызван фотоном с энергией меньше энергии покоя электрона $E_0 = 0,5 \text{ МэВ}$.

$T_{\text{макс}}$ определяется по релятивистской формуле, если $E_0 \geq 0,5 \text{ МэВ}$:

$$T_{\text{макс}} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

где m – масса электрона, v – скорость электрона, c – скорость света в вакууме.

Из уравнения Эйнштейна следует $v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2}{m}(h\nu - A_B)}$, т.е. $v_{\text{макс}}$ зависит от частоты излучения, но не зависит от его интенсивности.

Вольтамперная характеристика (зависимость фототока I , образуемого потоком электронов, испускаемых под действием света от анодного напряжения U между электродами).

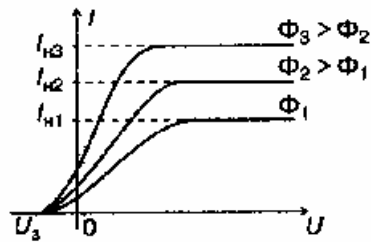


Рис. 2.

На рис. 2 приведено несколько вольтамперных характеристик фотоэлемента, снятых при одной и той же частоте света, но при различных потоках (интенсивностях) света $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3$. Характер этих кривых объясняется следующим образом. Электроны вылетают из катода с различными по величине скоростями. При $U = 0$ лишь часть испущенных электронов обладающих достаточно большими скоростями, достигает анода. При некотором положительном напряжении ($U > 0$) фототок достигает насыщения – все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. Чем больше световой поток Φ , тем больше квантов света поглощается электронами в единицу времени, тем больше электронов вылетает из металла и, следовательно, тем больше ток насыщения $I_n = k\Phi$. Для прекращения фототока необходимо приложить достаточно по величине отрицательное напряжение U_3 , называемое **задерживающим**

напряжением. В этом случае ни одному из электронов, даже обладающему при вылете из катода максимальной скоростью $v_{\text{макс}}$, не удастся преодолеть задерживающее поле и достичь анода. Поэтому

$$\frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} = eU_3 \text{ и } v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2eU_3}{m}}, \text{ где } e \text{ – заряд электрона, } m \text{ – масса электрона, } U_3 \text{ – задерживающее}$$

напряжение. Вольтамперная характеристика позволяет определить число электронов, вылетающих из катода в единицу времени и максимальную кинетическую энергию электронов, которая выражается через задерживающее напряжение. Коэффициент пропорциональности k (мкА/лм), соответствующий силе фототока (выраженной в микроамперах) при освещенности катода световым потоком 1 лм, называют **фоточувствительностью освещаемой пластинки**. Фототок насыщения $I_n = en$, где n – число электронов, испускаемых катодом в 1с, e – заряд электрона.

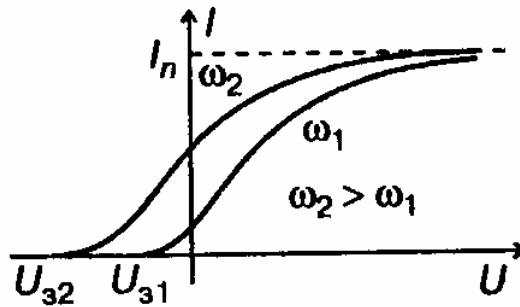


Рис. 3

Поскольку $T_{\text{макс}} = eU_3$, то уравнение Эйнштейна можно записать в виде: $\frac{hc}{\lambda} = h\nu = A_B + eU_3$.

В случае если энергия фотона много больше работы выхода ($h\nu = \hbar\omega \gg A_B$), то

$$h\nu = \hbar\omega = T_{\text{макс}} = eU_3$$

Внешний фотоэффект считается состоявшимся, если электрон выходит из металла с нулевой скоростью. Минимальная частота ν_0, ω_0 или максимальная длина волны λ_0 падающего кванта, при которой это происходит, называется красной границей фотоэффекта. Красной граница фотоэффекта называется потому, что увеличение длины волны падающего света до максимально возможной соответствует смещению в красную область видимого спектра. При меньшей частоте падающего света (большей длине волны) фотоэффект не наблюдается. С учетом красной границы фотоэффекта уравнение Эйнштейна можно записать в следующем виде:

$$eU_0 = h(\nu - \nu_0) = \hbar(\omega - \omega_0) = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Здесь учтено, что $A_B = h\nu_0 = \hbar\omega_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ и $T_{\text{макс}} = eU_3$.

Энергию фотонов и работу выхода принято выражать во внесистемных единицах - электронвольтах. (эВ). Один электронвольт равен энергии, приобретенной электроном при прохождении им разности потенциалов—1В: $1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$.

Экспериментально было обнаружено, что зависимость $T_{\text{макс}} = eU_3$ от ω для данного металла имеет вид наклонной прямой, причем наклон прямых, построенных для разных металлов, оказался одинаковым.

Из соотношения $\hbar\omega = \hbar\omega_0 + eU_3$ вытекает уравнение, соответствующее экспериментальной зависимости, показанной на рис. 4, $eU_3 = T_{\text{макс}} = \hbar(\omega - \omega_0)$.

Зависимость максимальной кинетической энергии фотоэлектронов от частоты.

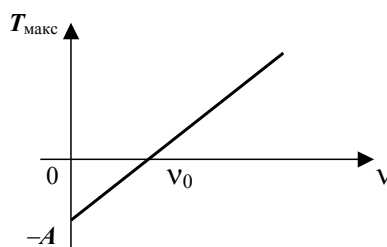


Рис. 4

В процессе поглощения свет ведет себя как частица (ее назвали фотоном) с энергией: $E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$, где $h, \hbar$ —постоянная Планка, ω —циклическая частота электромагнитного излучения, ν —линейная частота электромагнитного излучения, c —скорость света в вакууме, λ —длина волны электромагнитного излучения.

Фотон движется со скоростью света и поэтому обладает массой покоя, равной нулю. Его импульс P : $P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$ или $P = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, где k – волновое число, E – энергия фотона, $h, \hbar$ – постоянная Планка, ω – циклическая частота электромагнитного излучения, ν – линейная частота электромагнитного излучения, c – скорость света в вакууме, λ – длина волны электромагнитного излучения.

Направление импульса фотона $\vec{P}$ совпадает с направлением волнового вектора $\vec{k}$: $\vec{P} = \hbar\vec{k}$.

Эффект Комптона.

В 1922 году А. Комптон, исследуя рассеяние рентгеновского излучения различными веществами обнаружил, что в нем, наряду с исходной длиной волны λ , появляется смещенная линия с длиной волны $\lambda' > \lambda$.

Это изменение длины волны получило название **комптоновского смещения**, а само явление **эффекта Комптона**. Разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ оказалась зависящей только от угла θ между направлениями рассеянного и первичного лучей.

Комптоновское смещение $\Delta\lambda$ не зависит от длины волны λ и от природы рассеивающего вещества и определяется формулой: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$, где $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ – комптоновская длина волны той частицы, масса m которой фигурирует в формуле; λ и λ' – длины волн падающего и рассеянного излучения; θ – угол рассеяния; m – масса электрона или какой-либо другой заряженной частицы, на которой происходит комптоновское рассеяние. Для электрона $\lambda_c = 2,42$ пм.

Все закономерности эффекта Комптона могут быть объяснены, если рассмотреть упругое столкновение рентгеновского кванта с покоящимся электроном, слабо связанным с атомом. Происходит процесс, напоминающий удар двух бильярдных шаров, когда один шар (рентгеновский квант) налетает на покоящийся шар (электрон) и в результате абсолютно упругого удара шары (рассеянный квант и электрон) разлетаются под некоторым углом. Налетающий квант с энергией $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ передает часть своей энергии электрону отдачи, поэтому рассеянный квант имеет меньшую энергию и, следовательно, большую длину волны.

Энергия рентгеновского кванта (десятки кэВ) на несколько порядков превосходит энергию связи электрона в атоме (несколько десятков эВ). Поэтому наиболее слабо связанные с атомом электроны внешних оболочек можно считать свободными и покоящимися.

Законы сохранения энергии и импульса при комптоновском упругом рассеянии (электрон считается абсолютно свободным):

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + c\sqrt{p_e^2 + m^2c^2}$$

$$\hbar\vec{k} = \vec{p}_e + \hbar\vec{k}'$$

(релятивистская формула используется из-за того, что в общем случае скорость электрона отдачи очень большая).

Здесь $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света, m – масса электрона, $\vec{p}_e$ – импульс электрона, λ и λ' – длины волн падающей и рассеянной волн, $\vec{k}$ и $\vec{k}'$ – волновые векторы падающего и рассеянного фотонов (модуль волнового вектора равен $\frac{2\pi}{\lambda}$).

Электрон в лабораторной системе отсчета можно считать неподвижным, тогда его исходный импульс равен нулю, а энергия mc^2 .

В эффекте Комптона участвуют только свободные электроны, которые слабо связаны с атомами. Если же энергия связи электрона больше энергии фотона, то такой электрон не будет свободным и эффект Комптона не возникает. В этом случае фотон взаимодействует с жестко связанной системой электрон-ядро и «отскакивает» от нее, практически не изменяя своей энергии и длины волны. В реальном веществе фотоны сталкиваются как со свободными, так и с сильно связанными электронами, поэтому и возникают оба компонента рассеяния с длинами волн λ и λ' .

Кинетическая энергия электрона отдачи: $T = \varepsilon - \varepsilon'$, где $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ – энергия падающего фотона и

$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'}$ – энергия рассеянного фотона.

Соотношение между энергией падающего ε и рассеянного ε' фотонов при комптоновском рассеянии:

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2}, \text{ откуда } \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)(1 - \cos \theta) + 1}, \text{ где } E_0 = mc^2 = 0,511 \text{ МэВ} - \text{ энергия покоя}$$

электрона.

Формула для угла φ , определяющего направление движения электрона отдачи:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ctg(\theta/2)}{1 + \frac{\varepsilon}{E_0}}.$$

Ядерная (планетарная) модель атома.

Экспериментально установив, что в атоме (размером $\sim 10^{-10}$ м) имеется ядро (размером $\sim 10^{-15}$ м), в котором сосредоточена вся масса атома (99,4%), Резерфорд предложил планетарную модель строения атома. Вокруг ядра с зарядом Ze (Z – порядковый номер элемента в системе Д.И. Менделеева, e – заряд электрона) под действием сил электростатического притяжения по круговым (или эллиптическим) орбитам движутся электроны (подобно тому, как планеты обращаются вокруг Солнца под действием сил гравитационного притяжения), образуя электронную оболочку атома. Однако такая модель оказалась несостоятельной. Движение электрона по круговой орбите происходит с нормальным ускорением, поэтому он постоянно излучает электромагнитные волны и теряет свою энергию. В результате через короткое время электрон упадет на ядро, и атом перестанет существовать.

Выход из сложившейся ситуации предложил Нильс Бор, который дополнил модель атома Резерфорда двумя постулатами.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):

В атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) орбиты (состояния), находясь на которых электрон не излучает энергии.

Из всех возможных орбит электрона разрешенными являются только те, для которых момент импульса электрона кратен величине $\hbar$, т.е. для которых выполняется условие (**правило квантования**):

$$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

где m – масса электрона, v_n – скорость электрона на n -ой орбите радиусом r_n , $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с –

постоянная Планка, n – главное квантовое число, L_n – момент импульса электрона на n -орбите.

Второй постулат Бора (правило частот).

Любое изменение энергии атома связано со скачкообразным переходом из одного стационарного состояния в другое.

По второму постулату, при переходе из одного состояния в другое атом испускает или поглощает фотон, энергия которого определяется выражением $\hbar\omega = h\nu = E_2 - E_1$ (**правило частот**).

Таким образом, энергия фотона равна разности энергий стационарных состояний электрона до (E_2) и после (E_1) перехода. Переход из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией сопровождается излучением фотона. Обратный процесс возможен только при поглощении фотона. В первом случае электрон переходит с более удаленной от ядра орбиты на более близкую, во втором случае электрон переходит на более удаленную от ядра орбиту.

Набор возможных дискретных частот $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$ квантовых переходов и определяет линейчатый спектр атома.

Спектр излучения атомарного водорода состоит из отдельных спектральных линий, расположенных в определенном порядке. Спектральные линии образуют серии, линии которых могут быть представлены в виде обобщенной (серийной) формулы Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\lambda} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \nu = R_{\nu} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \omega = R_{\omega} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где R_{λ} , R_{ν} , R_{ω} – постоянные Ридберга – $R_{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, $R_{\nu} = c R_{\lambda} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $R_{\omega} = 2\pi R_{\nu} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$; λ, ν, ω – длина волны, линейная и круговая частота спектральных линий в спектре атома водорода, соответственно; n – номер энергетического уровня ($n = 1, 2, 3, \dots$), на который переходит электрон в атоме в спектре испускания $m > n$, n определяет серию; m – номер энергетического уровня, с которого переходит электрон, m определяет отдельные линии соответствующей серии и принимает все целочисленные значения, начиная с $n + 1$ ($m = n + 1, n + 2, \dots$) (см. таблицу 1).

Таблица 1

Таблица серий в спектре атома водорода.

Значение n	Наименование серии	Значение m
1	Серия Лаймана в ультрафиолетовой области спектра	2, 3, 4, ...
2	Серия Бальмера в видимой области спектра	3, 4, 5, ...
3	Серия Пашена в инфракрасной области спектра	4, 5, 6, ...
4	Серия Брэкетта в инфракрасной области спектра	5, 6, 7, ...

При увеличении m длина волны уменьшается, а частота линий увеличивается и достигает предельного значения $\frac{R_{\nu}}{n^2}$ при $m \rightarrow \infty$. $\frac{R_{\nu}}{n^2}$ является границей серии. Головная линия серии – линия, соответствующая наименьшей частоте (наибольшей длине волны) в серии при переходе с уровня $n + 1$ на уровень n .

Спектр поглощения атома водорода при нормальных условиях содержит только одну серию – серию Лаймана.

Второй закон Ньютона для электрона в водородоподобном ионе:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Водородоподобные ионы имеют ядро с зарядом Ze и один электрон. Это ионы He^+ , Li^{++} , Be^{+++} и др. При $Z=1$ ион становится атомом водорода.

Радиусы разрешенных орбит в боровской модели для водородоподобного иона :

$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Zme^2} n^2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбиты, ϵ_0 – электрическая постоянная, m – масса электрона, e – заряд электрона, $\hbar$ – постоянная Планка.

Ближайшей к ядру орбите соответствует состояние с $n = 1$ атома называется основным, а радиус первой орбиты электрона при $Z=1$ (атом водорода) называется боровским радиусом и обозначается a :

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 53 \text{ пм} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Он является единицей длины в атомной физике и зависит лишь от фундаментальных постоянных. Тогда $r_n = n^2 \cdot r_1 = a \cdot n^2$, т.е. радиусы орбит для стационарных состояний атома водорода квантованы и равны соответственно $a, 4a, 9a, \dots$

Скорость электрона в водородоподобном ионе с номером n : $v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n}.$

Угловая скорость вращения электрона на орбите с номером n : $\omega_n = \frac{\omega_1}{n^3}$, где

$\omega_1 = \frac{Z^2 m e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^3}$ –угловая скорость на первой орбите; n –главное квантовое число или номер орбиты.

Полная энергия электрона в водородоподобном ионе складывается из его кинетической энергии и потенциальной энергии в электростатическом поле ядра:

$E_K = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$, $E_{\Pi} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$, $E = E_K + E_{\Pi} = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$. (знак минус означает, что электрон находится в связанном состоянии.)

При $Z=1$ все формулы дают соответствующие величины для атома водорода.

Состояние с номером $n = 1$ и энергией $E_1 = -13,6$ эВ – основное состояние, остальные значения $n > 1$ соответствуют возбужденным состояниям.

Придавая n целочисленные значения, получаем для атома водорода энергетические уровни, схематически представленные на рис. 5.

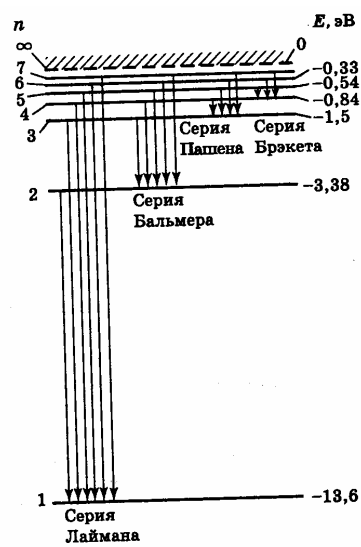


Рис.5

Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома (водородоподобного иона)

энергией ионизации E_i : $E_i = \frac{Z^2 m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = 2,16 \cdot 10^{-18}$ Дж= 13,6эВ. Атом водорода обладает минималь-

ной энергией ($E_1 = -13,6$ эВ) при $n = 1$ и максимальной при $n \rightarrow \infty$ (при удалении электрона из атома).

Для водородоподобного иона $E_1 = -Z^2 13,6$ эВ.

Энергия возбуждения $E_{\text{возб}}$ – энергия, которую необходимо сообщить атому (водородоподобному иону), чтобы электрон из основного состояния перешел в возбужденное. Энергия связи $E_{\text{св}}$ данного состояния – энергия, необходимая для удаления электрона из атома (водородоподобного иона), находящегося в данном возбужденном состоянии.

Энергия фотона, испускаемого электроном при переходе из одного состояния в другое:

$E = E_i Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$, где E_i – энергия ионизации атома водорода, $E_i = 2\pi\hbar R_\lambda c$, здесь

$R_\lambda = \frac{m e^4}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 c}$ –постоянная Ридберга, c – скорость света, $\hbar$ –постоянная Планка.

Энергия ионизации, выраженная в электрон–вольтах, численно равна потенциалу ионизации, выраженному в вольтах. Потенциалом ионизации называется ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для ионизации ато-

ма (водородоподобного иона): $U_i = \frac{E_i}{e} = 13,6$ В.

Первый потенциал возбуждения U_1 есть наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние:

$$eU_1 = 2\pi\hbar c R_\lambda \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{3}{4} 2\pi\hbar c R_\lambda = \frac{3}{4} E_i,$$

так как $n=1$ и $m=2$. $U_1 = \frac{3}{4} U_i = 10,2 \text{ В}$.

Гипотеза де Бройля.

Луи де Бройль высказал гипотезу о том, что установленный ранее для квантов света – фотонов корпускулярно–волновой дуализм имеет универсальный характер и присущ всем микрочастицам – электронам, протонам, атомам и т.д., т.е. частицы материи наряду с корпускулярными свойствами обладают также и волновыми свойствами.

Количественные соотношения, связывающие корпускулярные (энергия и импульс) и волновые (частота, длина волны) характеристики микрочастиц, те же что и для фотона.

$$\text{Соотношения: } E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \text{ и } \vec{p} = \hbar\vec{k},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, а $\vec{k}$ – волновой вектор, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$ ($\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны); $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка, получили название **формул де Бройля**.

Длина волны, связанная с частицей, определяется выражением:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

Волны, ассоциированные со свободно движущимися частицами, получили название **волн де Бройля**.

Последнее соотношение справедливо для любой частицы (нерелятивистской и релятивистской) с импульсом p .

Согласно де Бройлю, движение частицы описывается волновым процессом, характеризуемым длиной волны: $\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p}$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. В нерелятивистском случае $p = mv$, где m – масса частицы, v – ее скорость.

Ряд полезных соотношений, связывающих длину волны де Бройля с параметрами движущейся частицы:

Зависимость длины волны λ от скорости v частицы:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\frac{v}{c}} = \lambda_c \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\frac{v}{c}},$$

где m – масса частицы, v – ее скорость, λ_c – комптоновская длина волны частицы, c – скорость света,

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Выразив с помощью соотношения $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ импульс частицы p через ее полную энергию, найдем, что

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}} = \frac{2\pi\hbar c / E}{\sqrt{1 - (mc^2/E)^2}}.$$

Обозначим T кинетическую энергию частицы. Воспользовавшись определением $T = E - mc^2$, получим формулу:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T+2mc^2)}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}} \cdot \frac{1}{1+T/(2mc^2)},$$

выражающую дебройлевскую длину волны частицы через ее кинетическую энергию.

В предельном случае нерелятивистской частицы, когда отношение $\frac{T}{mc^2} \ll 1$ получаем выражение для дебройлевской длины волны в нерелятивистском приближении: $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$.

Зависимость длины волны де Бройля заряженной частицы от ускоряющей разности потенциалов U электрического поля, в котором она движется: $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2qmU}}$, где m – масса частицы; q – заряд частицы.

Основываясь на гипотезе де Бройля, можно объяснить первый постулат Бора. Подставляя в $mv_n r_n = n\hbar$ значение $\hbar$, выраженное из формулы $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ ($\hbar = \frac{\lambda mv}{2\pi}$), получаем $2\pi r_n = n\lambda$. Это соотношение показывает, что с точки зрения гипотезы де Бройля **стационарными являются лишь те орбиты, на которых укладывается целое число волн де Бройля.**

Соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Поскольку микрочастица является волной определить траекторию ее движения, т.е. задать ее положение и импульс, не представляется возможным (распространяющаяся волна находится одновременно в нескольких точках). Неопределенность движения микрочастицы ограничивается соотношениями:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \hbar$$

$$\Delta p_z \cdot \Delta z \geq \hbar.$$

Здесь $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – неопределенности координат x, y, z ; $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ – неопределенности проекций импульса частицы на координатные оси; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Эти соотношения носят название **соотношений неопределенностей Гейзенберга.**

В точном соотношении неопределенностей под Δx и Δp_x должны пониматься среднеквадратичные отклонения от средних значений, а справа не h и не $\hbar$, а $\hbar/2$. Но во всех принципиальных вопросах существенно знать лишь порядок величины $\Delta x \cdot \Delta p_x$, а не ее точное значение.

Таким образом, произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка $\hbar$. Следовательно, чем меньше неопределенность одной из величин (x, y, z или p_x, p_y, p_z), тем больше неопределенность другой.

Соотношения неопределенностей для координат и проекций импульса ограничивают точность **одновременного** измерения координат и соответствующих проекций импульса частицы.

Если, например, мы стремимся точнее измерить координату микрочастицы x , т.е. уменьшать неопределенность Δx , то поскольку процесс измерения обязательно сопровождается неконтролируемым воздействием на микрочастицу со стороны «измерительного прибора», это воздействие увеличивает неопределенность проекции импульса: $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$. Таким образом, чем точнее определена координата x

($\Delta x \rightarrow 0$), тем менее точно определена проекция p_x ($\Delta p_x \rightarrow \infty$), и наоборот.

В квантовой механике существует и второе соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (2)$$

где ΔE – неопределенность энергии некоторого состояния системы; Δt – промежуток времени, в течение которого оно существует.

Это соотношение означает, что чем короче время существования какого-либо состояния системы, тем больше неопределенность значения энергии этого состояния.

Энергетические уровни (дискретные значения энергии) E_1, E_2, E_3 и т.д. имеют некоторую ширину (см. рисунок), зависящую от времени пребывания системы в состояниях, соответствующих этим уровням энергии. «Размытость» уровней приводит к неопределенности энергии излучаемого фотона (ΔE) и его частоты ($\Delta \nu$) при переходе системы с одного энергетического уровня на другой: $\Delta E = \Delta(h\nu) = h\Delta\nu = \Delta(\hbar\omega) = \hbar\Delta\omega$. Это проявляется в естественной ширине наблюдаемых спектральных линий.

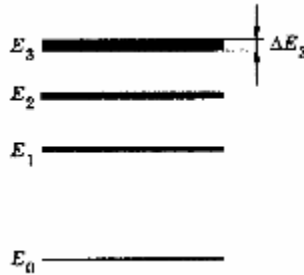


Рис.6

Как правило, в расчетах вместо точной формулировки используют приближенный вариант записи: $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar$ и $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$, который позволяет получать оценки по порядку величины.

Для оценок наименьших возможных значений физических величин (например, энергии) обычно полагают, что $\Delta x \sim x$ и $\Delta p_x \sim p_x$.

Невозможность одновременно точного определения координаты и соответствующей составляющей импульса не связана с несовершенством методов измерения или измерительных приборов, а является следствием специфики микрообъектов, отражающей особенности их объективных свойств, а именно двойственную корпускулярно–волновую природу.

Волновая функция.

Для описания волновых и корпускулярных свойств микрочастицы задается волновая функция или пси–функция $\Psi(\vec{r}, t)$ (описывающую распространение волны–частицы), параметрами которой являются энергия и импульс частицы. В квантовой теории $\Psi(\vec{r}, t)$ является комплексной. В квантовой механике невозможно точно определить положение микрочастицы в пространстве. Возможно лишь определение вероятности нахождения микрочастицы в некоторой области пространства. Другого способа описания движения объектов в микромире не существует.

Вероятность нахождения частицы в момент времени t в интересующем нас объеме dV пропорциональна объему и определяется, согласно М. Борну, квадратом модуля Ψ –функции:

$$dP = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = \Psi \cdot \Psi^* dV,$$

где Ψ^* – комплексно–сопряженная функция, x, y, z – координаты точки в объеме dV .

Плотность вероятности, т.е. вероятность нахождения частицы в единице объема $P = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$. Эта величина является экспериментально наблюдаемой, в то время как сама пси–функция, будучи комплексной, не доступна наблюдению.

Таким образом, квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности, или отношению вероятности нахождения частицы в малом объеме dV к этому объему $\left(|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV}\right)$.

Пси–функцию выбирают так, чтобы она удовлетворяла условию нормировки $\int_V |\Psi|^2 dV = 1$, где интеграл берется по всему пространству, где находится частица или по той области, в которой Ψ отлична от нуля. Условие нормировки означает, что во всей области, где $\Psi \neq 0$, частица находится с вероятностью равной 1. Пси–функцию, удовлетворяющую условию нормировки, называют нормированной.

Вероятность dP обнаружить частицу в интервале от x до $x+dx$ (в одномерном случае): $dP = |\Psi(x)|^2 dx$, где $|\Psi(x)|^2$ – плотность вероятности.

Вероятность P обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 :

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx,$$

где $\Psi(x)$ – координатная часть волновой функции.

Если известна волновая функция $\Psi(\vec{r}, t)$, то можно с ее помощью вычислить средние значения физических величин, характеризующих микрочастицу. Средние значения физических величин: координаты x частицы

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx,$$

любой функции координат $f(x)$,

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f(x) \Psi dx,$$

где интегрирование производится по интересующей нас области.

Уравнение Шредингера.

Это основное уравнение нерелятивистской квантовой механики, играющее такую же роль, как основное второй закон Ньютона в нерелятивистской механике. Уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi,$$

где i – мнимая единица, равная $\sqrt{-1}$; m – масса частицы, Δ – оператор Лапласа $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$; $\hbar$ – постоянная Планка; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия поля.

Это уравнение называют **временным** или **общим** уравнение Шредингера.

В случае, когда потенциальная энергия поля не зависит от времени уравнение Шредингера принимает стационарный вид:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0,$$

здесь E – полная энергия частицы; Ψ – координатная часть волновой функции, описывающей состояние частицы.

Пси-функция $\Psi(\vec{r})$ должна быть конечной, однозначной и непрерывной во всем пространстве. Решения уравнения Шредингера, удовлетворяющие этим условиям, оказываются возможными лишь при некоторых значениях энергии E . Их называют **собственными значениями**, а функции $\Psi(\vec{r})$, **являющиеся решениями уравнения Шредингера при этих значениях энергии, – собственными** функциями.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной ℓ : $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0$, где введено обозначение $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Собственные значения энергии частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме: $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Здесь m – масса частицы, ℓ – ширина ямы. Со-

ответствующие E_n собственные волновые функции частицы: $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, здесь ℓ – ширина ямы; x – координата ($0 < x < \ell$).

Графики нескольких собственных функций показаны на рис.7 пунктирными линиями, а распределение плотности вероятности – сплошными.

Разность энергий двух соседних уровней ΔE_n изменяется линейно с ростом n :

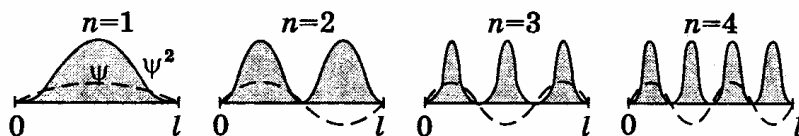


Рис.7

$$\Delta E_n = \Delta E_{n+1} - E_n \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell} (2n+1).$$

Плотность вероятности нахождения частицы на единице длины в том или ином месте внутри одномерной бесконечной прямоугольной потенциальной ямы: $|\Psi_n(x)|^2 = \sin^2\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$.

Линейный гармонический осциллятор представляет собой частицу массой m , движущуюся в одномерном потенциальном поле $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, где $U(x)$ – потенциальная энергия частицы в этом поле, k – коэффициент квазиупругой силы, x – пространственная координата частицы. Частица совершает колебания с собственной циклической частотой ω_0 вдоль оси под действием квазиупругой силы. Коэффициент k связан с m и ω_0 соотношением $k = m\omega_0^2$. Тогда для $U(x)$ можно записать

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

Уравнение Шредингера для квантового гармонического линейного осциллятора:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \Psi = 0, \text{ здесь } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ – собственная частота классического гармонического}$$

осциллятора, m – масса частицы, $\frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$ – потенциальная энергия осциллятора.

Собственные значения E (энергии колебаний) гармонического осциллятора: $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$,

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$. При $n = 0$ $E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ – **нулевая энергия** – наименьшая энергия, которой должен обладать линейный гармонический осциллятор в наини́зшем энергетическом состоянии.

Таким образом, энергия квантового гармонического осциллятора в принципе не может обращаться в нуль. Отличие от нуля минимальной энергии квантового гармонического осциллятора есть проявление фундаментального физического принципа – соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Физика атома.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром в водородоподобной системе равна:

$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$, где r – расстояние между электроном и точечным ядром, Z – зарядовое число, e – элементарный заряд. Уравнение Шредингера для движения электрона в атоме водорода

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) \Psi = 0,$$

удобнее записать в сферической системе координат r, θ, φ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0.$$

Собственные значения энергии электрона в водородоподобном ионе:
$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – главное квантовое число. Собственные функции уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода можно представить в виде произведения двух функций

$$\Psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) \cdot Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi),$$

где $R_{n\ell}(r)$ радиальная часть волновой функции зависит только от r и определяется квантовыми числами n и ℓ , а $R_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$ – угловая часть волновой функции задается квантовыми числами ℓ и m_ℓ . Квантовые числа ℓ и m_ℓ определяют момент импульса и его проекцию, которые характеризуют вращение электрона в атоме водорода.

Квантование момента импульса.

В квантовой механики невозможно полностью задать вектор т.е. определить его проекции на оси координат. Нельзя, например, задать полностью радиус вектор, определяющий положение частицы в пространстве. Возможно лишь определение модуля вектора и его проекции на одну из осей (обычно ось z)/

Модуль момента импульса: $L_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}$, где ℓ – орбитальное квантовое число, ($\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Проекция вектора орбитального момента импульса на заданное направление (ось Z): $L_{\ell z} = m_\ell \hbar$, где m_ℓ – магнитное квантовое число, ($m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$).

Собственные волновые функции уравнения Шредингера для движения электрона в атоме водорода зависят от трех квантовых чисел, имеющих следующий смысл:

Главное квантовое число $n = 1, 2, 3, \dots$ определяет уровни энергии электрона в атоме водорода.

Орбитальное квантовое число ℓ , которое при данном n может принимать значение $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, задает модуль орбитального момента импульса L_ℓ электрона относительно ядра: $L_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Магнитное квантовое число m_ℓ , которое при данном ℓ принимает значение $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \ell$. Это число определяет проекции орбитального момента импульса электрона на некоторое произвольно выбранное направление Z .

В 1925 году Гаудсмит и Уленбек выдвинули гипотезу о наличии у электрона собственного момента, названного **спином**. Дальнейшие эксперименты показали, что спин существенно квантовая величина, не имеющая классического аналога. Спин характеризует внутреннее свойство электрона подобно массе и заряду. Аналогично орбитальному моменту, спин определяется модулем $L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$, и проекцией на ось z $L_{sz} = \pm \hbar m_s$, где s – **спиновое квантовое число**, и $L_{sz} = \hbar m_s$, $m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$.

Спиновое (магнитное спиновое) квантовое число m_s может принимать только два значения $\left(\pm \frac{1}{2}\right)$ и характеризует возможные значения проекции на ось Z спина (собственного механического момента) L_s электрона. Спином обладает подавляющее большинство частиц, например, у протона и нейтрона $s = \frac{1}{2}$, а у фотона $s = 1$.

Таким образом, электрон в атоме водорода характеризуется четырьмя квантовыми числами n, ℓ, m_ℓ и m_s .

Таблица 2

Собственных значений орбитального и спинного моментов и их проекций на ось Z .

$L_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}$	$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$
$L_{\ell z} = \hbar m_\ell$	$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$

$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$	$s = \frac{1}{2}$
$L_{sz} = \hbar m_s$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$

С механическим моментом электрона L_ℓ связан **магнитный момент μ** , который определяется модулем μ_ℓ и проекцией на произвольную ось Z $\mu_{\ell z}$

$$\mu_\ell = -\mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)}, \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_{\ell z} = -\mu_B m_\ell, m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell,$$

где μ_B – магнетон Бора: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$, играющего роль кванта проекции магнитного момента.

Гиромагнитное отношение – отношение магнитного момента к механическому, т.е. $\frac{\mu_\ell}{L_\ell} = -\frac{e}{2m}$.

Спиновый магнитный момент и его проекция на произвольную ось Z определяются как

$$\mu_s = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \mu_{sz} = -2\mu_B m_s, m_s = s, s-1, \dots, -s \text{ при } s = \frac{1}{2} \quad m_s = +\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{1}{2}.$$

Принято говорить, что спиновый магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора. Такая терминология обусловлена тем, что при измерении магнитного момента мы обычно измеряем его проекцию, а она как раз и равна одному μ_B .

Отношение собственного магнитного и механического момента электрона равно $\frac{\mu_s}{L_s} = -\frac{e}{m}$, где

μ_s – собственный магнитный момент электрона; m – масса электрона; e – заряд электрона.

Различные состояния электрона в атоме принято обозначать малыми буквами латинского алфавита в зависимости от значения орбитального квантового числа ℓ приведены в таблице 3:

Таблица 3					
Значение орбитального квантового числа ℓ	0	1	2	3	4
Символ соответствующего состояния электронов	s	p	d	f	g

Принято говорить об s –состояниях (или s –электронах), p –состояниях (или p –электронах) и т.д.

Значение главного квантового числа n указывают перед символом состояния с данным ℓ . Например, электрон, имеющий главное квантовое число $n = 2$ и $\ell = 1$, обозначают символом $2p$ и т.д.

Все волновые функции, соответствующие s –состояниям электрона в атоме водорода сферически симметричны. Это означает, что вероятность обнаружить электрон на некотором расстоянии r вблизи ядра зависит только от этого расстояния. В s –состоянии ($\ell = 0, m_\ell = 0$) волновая функция не зависит от углов θ и ϕ .

Нормированные собственные Ψ –функции, отвечающие $1s$ –состоянию (основному) и $2s$ –состоянию: $\Psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, $\Psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$, где a – боровский радиус.

В атомных единицах:

$$\Psi_{100}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\rho), \Psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2 - \rho) \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right),$$

где в качестве единицы длины принят боровский радиус

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 53 \text{ нм.}$$

При таком выборе единицы длины расстояние от ядра $\rho = \frac{r}{a}$ будет выражаться в безразмерных единицах длины, называемых атомными единицами.

Вероятность dP того, что электрон находится в области, ограниченной элементом объема dV , взятого в окрестности точки с координатами r, θ, φ : $dP = |\Psi_{n\ell m_\ell}(r, \theta, \varphi)|^2 dV$, где $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$ – элемент объема в сферических координатах.

Вероятность dP найти электрон в атоме водорода, находящемся в ns –состоянии, в интервале $(r, r + dr)$ одинакова по всем направлениям и определяется формулой $dP = |\Psi_{n00}(r)|^2 4\pi r^2 dr$, где Ψ_{n00} – собственная нормированная волновая функция ns –состояния ($\ell = 0, m_\ell = 0$), $dV = 4\pi r^2 dr$ – элемент объема в виде сферического слоя радиусом r и толщиной dr .

Вероятность обнаружения электрона в сферическом слое между r и $r + dr$ можно представить в виде $\rho_r dr$. Величина ρ_r и есть радиальная плотность вероятности – произведение $\rho_r dr$ дает вероятность того, что электрон будет обнаружен на расстоянии от ядра между r и $r + dr$.

$$\text{Таким образом, } \Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \rho_r = \frac{4}{a^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Следовательно, кратность вырождения n -го энергетического уровня водородоподобных систем равна n^2 . В действительности это число надо удвоить из-за наличия собственного момента (спина) у электрона. Таким образом, кратность вырождения n -го энергетического уровня $N = 2n^2$.

Принцип Паули.

В атоме не могут находиться два электрона с четырьмя одинаковыми квантовыми числами n, ℓ, m_ℓ, m_s .

В состояниях с данным значением n могут находиться в атоме не более $2n^2$ электронов (таблица 4):

Таблица 4

$n = 1$	$\ell = 0$	$m_\ell = 0$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
$n = 2$	$\ell = 0$	$m_\ell = 0$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
	$\ell = 1$	$m_\ell = -1, 0, +1$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
$n = 3$	$\ell = 0$	$m_\ell = 0$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
	$\ell = 1$	$m_\ell = -1, 0, +1$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
	$\ell = 2$	$m_\ell = -2, -1, 0, +1, +2$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$

По мере увеличения порядкового номера Z атома в соответствии с Принципом Паули происходит последовательное строго определенное заполнение электронных уровней атома.

$N(n, \ell, m_\ell, m_s) = 0$ или **1**, где $N(n, \ell, m_\ell, m_s)$ – число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел. Эти числа могут принимать следующие значения:

Максимальное число электронов $N(n, \ell, m_\ell)$, находящихся в состояниях, определяемых набором трех квантовых чисел n, ℓ, m_ℓ : $N(n, \ell, m_\ell) = 2$

Максимальное число электронов $N(n, \ell)$, находящихся в состояниях, определяемых двумя квантовыми числами n, ℓ : $N(n, \ell) = 2(2\ell + 1)$.

Максимальное число электронов $N(n)$, находящееся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом n (таблица 5): $N(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell + 1) = 2n^2$.

Таблица 5

Значение орбитального квантового числа ℓ	0	1	2	3	4
Символ соответствующего состояния электронов	s	p	d	f	g
Максимальное число электронов	2	6	10	14	18

Совокупность электронов атома с одинаковыми квантовыми числами n , образуют **оболочку**.

В соответствии со значением n оболочки обозначают большими буквами латинского алфавита следующим образом (таблица 6):

Таблица 6

Значение n	1	2	3	4	5	6
Оболочка	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>

Оболочки подразделяют на подоболочки, отличающиеся квантовым числом ℓ .

Подоболочки обозначают в виде $1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d; \dots$, где цифра означает квантовое число n , т.е. принадлежность к соответствующей оболочке: $K(n=1), L(n=2), M(n=3), \dots$

Возможные состояния электронов в атоме и их распределение по оболочкам и подоболочкам показано в таблице, в которой вместо обозначений $m_s = +\frac{1}{2}$ и $m_s = -\frac{1}{2}$ использованы для наглядности знаки $\uparrow$ и $\downarrow$.

Таблица 7

Оболочка	K	L				M								
Подоболочка (n, ℓ)	1s	2s	2p			3s	3p			3d				
m_ℓ	0	0	+1	0	-1	0	+1	0	-1	+2	+1	0	-1	-2
m_s	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$
Число электронов	2	2	6			2	6			10				

Распределение электронов по оболочкам и подоболочкам называют **электронной конфигурацией**. Электронная конфигурация записывается следующим образом: числа обозначают главное квантовое число или номер оболочки, латинские буквы – значение орбитального квантового числа или подоболочки, а индекс нал ними – число электронов в подоболочке (например, обозначению $2p$ отвечает электрон с $n=2$ и $\ell=1$; $2p^2$ означает, что таких электронов в атоме 2, и т.д.)

Символическое обозначение электронной конфигурации одного из атомов $1s^2 2s^2 2p^6 3s$ означает, что в атоме имеются два $1s$ –электрона, два $2s$ –электрона, шесть $2p$ –электронов и один $3s$ –электрон.

Принцип неразличимости тождественных частиц

Из принципа неразличимости тождественных частиц следует, что волновая функция микрочастиц является либо четной ($()$), либо нечетной (для частиц с полуцелым спином). Частицы с целым спином (фотоны и др.) описываются четной волновой функцией и называются **бозонами**. Частицы с полуцелым спином описываются нечетной волновой функцией и называются **фермионами**. К фермионам относятся электроны, протоны, нейтроны и т.д.

Для всех фермионов справедлив принцип Паули: в одном и том же квантовом состоянии системы не может находиться два одинаковых фермиона (например, электрона).

Электроны в металле.

Модель свободных электронов объясняет электрические и магнитные свойства твердых тел, в первую очередь металлов. Она исходит из представления, что металл содержит свободные электроны, способные перемещаться по всему объему. Это позволяет в первом приближении рассматривать электронную систему как идеальный газ из свободных электронов (фермионов) в прямоугольной потенциальной яме, которые подчиняются принципу Паули. Свободный электрон в металле характеризуется двумя квантовыми числами – главным и спиновым. (При движении электрона в атоме добавляются азимутальное и магнитное квантовые числа, связанные с его вращением вокруг ядра.) Поэтому уровни энергии в металле при $T = 0\text{K}$ заполняются электронами последовательно с низшего (основное состояние) до наивысшего, называемого **уровнем Ферми**. На каждом уровне находится два электрона, выше уровня Ферми уровни свободны.

Уровень Ферми или **энергия Ферми** – максимальная энергия электронов, отсчитанная от нулевой кинетической энергии определяется через их концентрацию следующим образом:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \text{ где } m \text{ – масса электрона, } n \text{ – концентрация электронов, } \hbar \text{ – постоянная Планка.}$$

Средняя энергия свободного электрона в металле при $T = 0\text{K}$: $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F(0)$, где $E_F(0)$ – энергия Ферми при $T = 0\text{K}$.

Температура T_0 , соответствующая энергии Ферми, называется **температурой вырождения** (температурой Ферми): $kT_0 = E_F$ отсюда $T_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mk} n^{2/3}$, здесь k – постоянная Больцмана, m – масса электрона, n – концентрация электронов.

При температурах много меньших температуры вырождения, электронная подсистема металла должна рассматриваться в рамках квантовой механики. В другом предельном случае она является чисто классическим объектом. Количественная оценка температуры вырождения дает $T_0 \sim 10^5\text{K}$. Из этой оценки сразу следует, что при всех температурах, пока металл остается твердым, его электронный спектр носит квантовый характер. Другими словами, электроны в металле всегда являются вырожденной системой.

Квантовые системы фермионов, к которым относится и электронный газ, описываются функцией распределения Ферми–Дирака: $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$, где T – абсолютная температура, E – энергия электрона, k – постоянная Больцмана, E_F – энергия Ферми.

При $T=0$ функция распределения имеет вид. $f(E) = \begin{cases} 1 & \text{при } E < E_F \\ 0 & \text{при } E > E_F \end{cases}$ (см. рис.8)

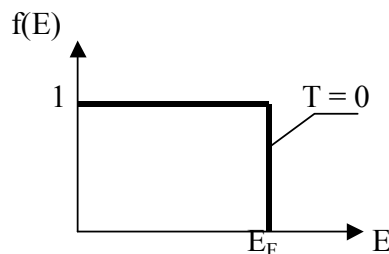


Рис.8

При $T = 0\text{K}$ все состояния с энергией $E < E_F$ заняты, а с $E > E_F$ – свободны. Уровень Ферми для электронного газа в металле при $T = 0\text{K}$ является последним заполненным уровнем.

Функция распределения определяет вероятность заполнения состояния с энергией E (или дает среднее число частиц в состоянии с энергией E). При температуре $T \neq 0$ и энергии $E = E_F$ функция $f(E) = \frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность заполнения уровня Ферми равна $\frac{1}{2}$. (см. рис.9).

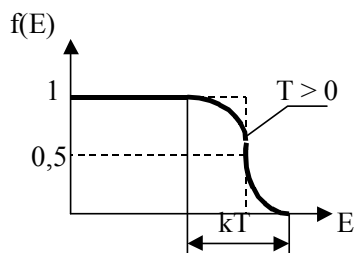


Рис.9

Имея в виду, что в модели свободных электронов последние находятся в прямоугольной потенциальной яме, распределение электронов изображают для наглядности так, как показано на рис.10.

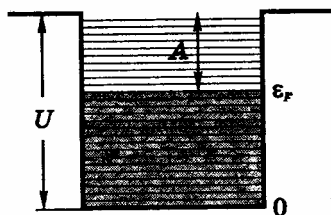


Рис.10

Здесь U –глубина ямы, A –работа выхода (наименьшая энергия, которую надо сообщить электрону для удаления его из металла, $A = U - E_F$). Спектр энергетических уровней дискретный (практически квазинепрерывный). Тонирована часть спектра, заполненного свободными электронами.

Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле при $T = 0$:

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot dE \quad (\text{при } E < E_F),$$

где $dn(E)$ –концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале значений от E до dE ; m и E – масса и энергия электрона; ϵ_F – уровень (или энергия) Ферми.

Собственная электропроводимость полупроводников:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta E / 2kT},$$

где ΔE – ширина запрещенной зоны.

Элементы ядерной физики

Ядро атома состоит из Z протонов и N нейтронов. Число нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре равно массовому числу A . Число нейтронов: $N = A - Z$. Для обозначения ядер применяют символ: ${}^A_Z X$.

Радиус ядра: $R = R_0 A^{1/3}$, где $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}$; A – массовое число (число нуклонов в ядре).

Нуклид – атом с определенным ядром (например, нуклиды ${}^{14}\text{C}$ и ${}^{23}\text{Mg}$). Нуклиды с одинаковым Z и разными A называются изотопами (например, ${}^{58}\text{Co}$ и ${}^{59}\text{Co}$).

Дефект массы Δm атомного ядра есть разность между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра: $\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_{\text{я}}$, где Z – зарядовое число (число протонов в ядре); m_p и m_n – массы протона и нейтрона соответственно; $m_{\text{я}}$ – масса ядра.

Если учесть, что $m_{\text{я}} = m_a - Zm_e$; $m_p + m_e = m_{\text{H}}$; $N = A - Z$, то формулу дефекта массы ядра можно представить в виде: $\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a$, где A – массовое число (число нуклонов в ядре); m_a – масса атома.

Энергия связи нуклонов в ядре:

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2 = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2,$$

где m_p и m_n – массы протона и нейтрона соответственно; $m_{\text{я}}$ – масса ядра; Z – зарядовое число (число протонов в ядре); A – массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ – масса атома водорода; m – масса атома.

Удельная энергия связи (энергия связи, отнесенная к одному нуклону), $E_{\text{св}}/A$. $c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$

Число ядер N , содержащихся в данной массе m некоторого изотопа A_ZX : $N = N_a \nu = \frac{mN_a}{\mu}$, где N_a – постоянная Авогадро; ν – число молей, содержащихся в данном препарате; μ – молярная масса изотопа.

Закон радиоактивного распада: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, здесь N – число нераспавшихся ядер в момент времени t ; N_0 – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ – постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + dt$: $dN = -\lambda N dt$, где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t ; λ – постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время t : $\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$.

Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада λ : $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, где $T_{1/2}$ – промежуток времени, за который распадается половина начального числа ядер.

Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной радиоактивного распада λ : $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Если $\Delta t \ll T$, то число распавшихся ядер можно находить по формуле: $\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$, где N_0 – начальное число ядер; λ – постоянная радиоактивного распада.

Активность нуклида: $A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$, измеряется числом ядер, распадающихся в единицу времени.

Изменение активности препарата со временем: $A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ Активность изотопа в начальный момент времени ($t = 0$): $A_0 = \lambda N_0$.

Массовая активность a (удельная активность) радиоактивного источника есть величина, равная отношению его активности A к массе m этого источника, то есть: $a = \frac{A}{m}$

Если имеется смесь ряда радиоактивных изотопов, образующихся один из другого, и если постоянная распада λ первого члена ряда много меньше постоянных всех остальных членов ряда (период полураспада T_1 материнского вещества существенно превышает период полураспада T_2 дочернего вещества, т.е. $T_1 \gg T_2$), то по истечении некоторого промежутка времени в смеси устанавливается состояние ра-

диоактивного равновесия между этими веществами, при котором активности всех членов ряда равны между собой:

$$\lambda_1 \cdot N_1 = \lambda_2 \cdot N_2 = \dots = \lambda_k \cdot N_k \quad \text{или} \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

При этом число ежесекундно распадающихся ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого же вещества в результате распада ядер материнского вещества.

Альфа-распад представляет собой излучение альфа-частиц (ядер атома гелия) высокой энергии.

Масса ядра уменьшается на четыре единицы, а заряд (порядковый номер элемента)—на две единицы.

Правило смещения: ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4He$

Бета-распад—излучение электрона, или позитрона.

Массовое число не изменяется.

Правило смещения для β^- -распада: ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e + \bar{\nu}$

Правило смещения для β^+ -распада: ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_{+1}^0e + \nu$,

где ν и $\bar{\nu}$ - нейтрино и антинейтрино соответственно.

Интенсивность узкого пучка монохроматических гамма-лучей, прошедших сквозь слой вещества толщиной x , уменьшается по закону: $J = J_0 e^{-\mu x}$, где J_0 —интенсивность излучения, падающего на слой; μ —линейный коэффициент ослабления.

Символическая запись ядерной реакции: ${}_Z^AX + a \rightarrow {}_{Z'}^{A'}Y + b$ или ${}_Z^AX(a,b){}_{Z'}^{A'}Y$,

где ${}_Z^AX$ и ${}_{Z'}^{A'}Y$ —исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A' ; a и b —соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

Для обозначения частиц приняты следующие символы: p —протон; n —нейтрон; d —дейтрон; t —трийтрон; α —альфа-частица; γ —гамма-фотон.

Законы сохранения в ядерных реакциях:

А) числа нуклонов $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;

Б) заряда $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$;

В) релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$;

Г) импульса $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4$.

Если общее число ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, больше двух, то запись соответственно дополняется.

Энергия ядерной реакции $Q = c^2[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]$,

где m_1 и m_2 —массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ —сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Если $(m_1 + m_2) > (m_3 + m_4)$, то энергия освобождается, энергетический эффект положителен, реакция экзотермическая.

Если $(m_1 + m_2) < (m_3 + m_4)$, то энергия поглощается, энергетический эффект отрицателен, реакция эндотермическая.

Энергия ядерной реакции представляется также в виде: $Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4)$, где T_1, T_2, T_3 и T_4 —соответственно кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта реакции.

Пороговая (минимальная) кинетическая энергия налетающей частицы, при которой становится возможной эндоэнергетическая ядерная реакция: $T_{\text{пор}} = \frac{m+M}{M}|Q|$, где m и M —массы налетающей частицы и ядра мишени, Q —энергия реакции.