Глава 7. Молекулярная физика. Газовые законы

Задача 1. *После того, как в комнате включили электрокамин, температура воздуха повысилась от 18°C до 27°C при неизменном давлении. На сколько процентов уменьшилось число молекул воздуха в комнате*?

Из уравнения состояния идеального газа, записанного в форме

$$p = \frac{N}{V} kT,$$

(k — постоянная Больцмана) выразим число молекул в объеме комнаты до и после нагревания

$$N_1 = \frac{pV}{kT_1} \qquad N_2 = \frac{pV}{kT_2}$$

и сосчитаем, на сколько процентов N_2 меньше, чем N_1

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1} = \frac{1/T_1 - 1/T_2}{1/T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 0{,}03$$

т. е. на 3%.

Задача 2. *Какова полная кинетическая энергия (в кДж) поступательного движения молекул газа, находящихся в баллоне емкостью 5 л при давлении 800 кПа*?

Средняя энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT .$$

Для энергии всего газа получаем

$$E = N\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}\frac{N}{V} kT \cdot V = \frac{3}{2} pV = 6 \text{ кДж},$$

где мы использовали уравнение состояния идеального газа в форме $p = nkT$.

Задача 3. *Средняя квадратичная скорость молекул газа равна 1000 м/с. Чему будет равна средняя квадратичная скорость после увеличения давления и объема газа в 1,2 раза*?

Чтобы вспомнить выражение для средней квадратичной скорости, проще всего исходить из формулы для средней энергии поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT .$$

где m_0 — масса одной молекулы. Получаем

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} .$$

Для отношения конечной и начальной скоростей получаем

$$\frac{v_{кв2}}{v_{кв1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}} = 1{,}2\,,$$

т. е. конечная средняя квадратичная скорость равна 1200 м/с.

Задача 4. *Какова была начальная температура (в кельвинах) воздуха, если при нагревании его на 3 К объем увеличился на 1% от первоначального? Процесс изобарный.*

Из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT$$

получаем, что если давления в двух состояниях газа одинаковы, то объем и температура этих состояний связаны соотношением

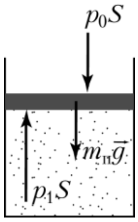
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

(уравнение изобарного процесса). Из условия задачи $T_2 = T_1 + \Delta T$ и $V_2 = 1{,}01 V_1$. Получаем

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1{,}01}{T_1 + \Delta T}\,,$$

откуда $T_1 = 100\Delta T = 300$ К.

Задача 5. *Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой 5 кг. Какой массы груз надо положить на поршень, чтобы он остался в прежнем положении, когда абсолютная температура газа будет увеличена вдвое? Атмосферное давление 100 кПа, площадь поршня 0,001 м^2. g = 10 м/с^2.*



Из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT$$

следует, что если объемы в двух состояниях газа одинаковы, то давления и температуры этих состояний связаны соотношением

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

(уравнение изохорного процесса). Так как в данном случае $T_2 = 2T_1$, то получаем

$$p_2 = 2p_1.$$

Запишем теперь условия равновесия поршня в начальном состоянии

$$p_1 S = p_0 S + m_п g,$$

где p_0 — атмосферное давление, и поршня с грузом в конечном состоянии

$$p_2 S = p_0 S + (m_п + m)g.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, приходим к простому соотношению

$$(p_2 - p_1)S = mg,$$

смысл которого состоит в том, что дополнительная внешняя сила (вес груза) компенсируется соответствующим увеличением силы давления со стороны газа. Подставив сюда $p_2 = 2p_1$, выразим массу груза

$$m = \frac{p_1 S}{g} = \frac{p_0 S + m_\text{п} g}{g} = m_\text{п} + \frac{p_0 S}{g} = 15 \text{ кг}.$$

Задача 6. *Под каким давлением (в кПа) надо наполнить воздухом баллон емкостью 10 л, чтобы при соединении его с баллоном емкостью 30 л, содержащим воздух при давлении 100 кПа, установилось общее давление 200 кПа*? Температура постоянна.

Воспользуемся законом Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме давлений, которое производил бы каждый отдельный газ в отсутствие остальных компонент смеси (сумме парциальных давлений). После соединения баллонов каждый газ займет объем V_1+V_2, и их парциальные давления можно найти из уравнений изотермического процесса

$$p_1 V_1 = \tilde{p}_1 (V_1 + V_2), \qquad p_2 V_2 = \tilde{p}_2 (V_1 + V_2).$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что полное конечное давление равно сумме парциальных давлений

$$p = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2,$$

получаем уравнение

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2,$$

из которого находим давление p_1

$$p_1 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1} = 500 \text{ Па}.$$

Замечание. Такое же уравнение можно получить и непосредственно из уравнений состояния

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\text{M}} RT, \qquad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\text{M}} RT, \qquad p(V_1 + V_2) = \frac{m}{\text{M}} RT,$$

выразив из них массы газов и подставив их в условие сохранения полной массы

$$m_1 + m_2 = m.$$

Задача 7. *До какого давления (в кПа) накачан футбольный мяч емкостью 3 л, если при этом было сделано 40 качаний поршневого насоса? За каждое качание насос захватывает из атмосферы 150 см^3 воздуха. Атмосферное давление 100 кПа. Содержанием воздуха в мяче до накачки пренебречь. Температура постоянна.*

Воздух, попавший в мяч в результате накачки, перед этим занимал объем $NV_п$ ($V_п$ — объем поршня, N — число качаний) при атмосферном давлении p_0. Из уравнения состояния следует, что если температуры начального и конечного состояний одинаковы, то давления и объемы связаны соотношением

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

(уравнение изотермического процесса). Для данного случая получаем

$$p_0(NV_п) = pV_м,$$

откуда находим давление воздуха в мяче

$$p = \frac{p_0(NV_п)}{V_м} = 200 \text{ кПа}.$$

Задача 8. *Давление воздуха в сосуде было равно 10^5 Па. После трех ходов поршня откачивающего насоса давление воздуха упало до 800 Па. Определите, во сколько раз объем цилиндра насоса больше объема сосуда. Температура постоянна.*

Откачивающий насос работает следующим образом. Цилиндр насоса соединяется с сосудом, и воздух расширяется от объема V до объема $V+V_ц$. При этом его давление уменьшается от начального p_0 до значения p_1, которое можно найти из уравнения изотермического процесса

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V+V_ц}.$$

Затем клапан отсоединяет цилиндр насоса от сосуда, воздух из цилиндра выбрасывается в атмосферу, и начинается следующий цикл откачки. Давление после второго хода поршня равно

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V+V_ц} = p_0 \left(\frac{V}{V+V_ц}\right)^2,$$

после третьего — равно

$$p_3 = p_2 \frac{V}{V+V_ц} = p_0 \left(\frac{V}{V+V_ц}\right)^3$$

(и т.д.). Решая уравнение, получаем

$$\frac{V_ц}{V} = \left(\frac{p_0}{p_3}\right)^{1/3} - 1 = 4.$$

Задача 9. *Воздух находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой 20,2 кг и сечением 20 см^2. После того, как цилиндр стали перемещать вертикально вверх с ускорением 5 м/с^2, высота столба воздуха в цилиндре уменьшилась на*

20%. Считая температуру постоянной, найдите атмосферное давление (в кПа). g = 10 м/с^2.

Конечное давление связано с начальным уравнением изотермического процесса

$$p_2V_2 = p_1V_1,$$

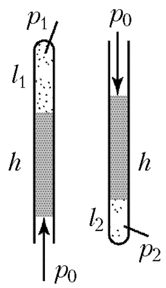
в котором по условию $V_2 = 0{,}8V_1$. Запишем 2-ой закон Ньютона для поршня в начальном и конечном состоянии

$$p_1S - p_0S - mg = 0, \qquad p_2S - p_0S - mg = ma,$$

выразим p_1 и p_2 и подставим их в уравнение изотермического процесса. Решая полученное уравнение, находим атмосферное давление

$$p_0 = \frac{m(4a - g)}{S} = 101 \text{ кПа}.$$

Задача 10. *В трубке, закрытой с одного конца, столбик воздуха заперт столбиком ртути длиной 19 см. Если трубку повернуть открытым концом вниз, длина столбика воздуха будет 10 см, а если открытым концом вверх, то 6 см. Найдите атмосферное давление (в мм рт. ст.).*



Так как температуры в двух состояниях газа одинаковы, то давления и объемы связаны уравнением изотермического процесса

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути для первого и второго положения трубки

$$p_0S - p_1S - mg = 0, \qquad p_2S - p_0S - mg = 0.$$

Выражая массу ртути через длину столбика h

$$m = \rho_{\text{рт}}hS,$$

получаем для давлений выражения, совпадающие с известными формулами гидростатики

$$p_1 = p_0 - \rho_{\text{рт}}gh, \qquad p_2 = p_0 + \rho_{\text{рт}}gh.$$

Уравнение изотермического процесса приобретает вид

$$(p_0 - \rho_{\text{рт}}gh)l_1S = (p_0 + \rho_{\text{рт}}gh)l_2S.$$

Так как нам надо найти давление p_0 в единицах высоты ртутного столба, представим его в виде

$$p_0 = \rho_{\text{рт}}gx,$$

что приводит к заметному упрощению уравнения

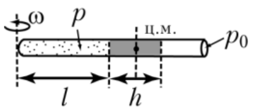
$$(x - h)l_1 = (x + h)l_2.$$

Выражая x, получаем

$$x = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} h = 76\,\text{см}\,,$$

т.е. давление равно 760 мм рт.ст.

Задача 11. *В длинной горизонтальной трубке, открытой с одного конца, столбик воздуха длиной 16 см заперт столбиком ртути длиной 20 см. Трубку приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через ее закрытый конец. При какой угловой скорости столбик ртути сместится на 4 см? Атмосферное давление 750 мм рт.ст., g = 10 м/с*^{2}.



На ртуть действует разность сил давления воздуха снаружи и внутри. Эта сила равна массе ртути, умноженной на ускорение ее центра масс

$$p_0S - pS = m\omega^2\left(l + \frac{h}{2}\right),$$

где $l = l_0 + \Delta l$ = 20 см — конечная длина столбика воздуха. Конечное давление выразим из уравнения изотермического процесса:

$$p_0(Sl_0) = p(Sl).$$

Выразим также атмосферное давление через высоту ртутного столба: $p_0 = \rho_{рт}gH$, а также массу ртути: $m = \rho_{рт}Sh$. В итоге приходим к уравнению

$$gH\left(1 - \frac{l}{l_0}\right) = h\omega^2\left(l + \frac{h}{2}\right),$$

откуда находим ω = 5 рад/с.

Задача 12. *Газ, занимающий при температуре 127°C и давлении 200 кПа объем 3 л, изотермически сжимают, затем изобарно охлаждают до температуры –73°C, после чего изотермически изменяют объем до 1 л. Найдите конечное давление (в кПа) газа.*

Для того, чтобы узнать конечное давление газа, не нужно знать, с помощью каких процессов мы перешли из начального состояния в конечное. Мы знаем все параметры начального состояния, конечный объем и конечную температуру (поскольку в последнем процессе температура не менялась, T_2 = 200 K). Записав объединенный газовый закон для этих двух состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}\,,$$

найдем конечное давление

$$p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{T_1 V_2} = \text{ 300 кПа.}$$

Задача 13. *Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 7°С. Длина каждой части 30 см. Когда одну часть сосуда нагрели, поршень сместился на 2 см. На сколько градусов нагрели газ? Температура газа в другой части сосуда не изменилась.*

В случае горизонтального сосуда равновесие поршня означает равенство давлений справа и слева от него. Запишем для каждого газа объединенный газовый закон (для газа во второй части сосуда получим уравнение изотермического процесса)

$$\frac{p \cdot lS}{T} = \frac{p' \cdot (l + \Delta l)S}{T + \Delta T},$$

$$\frac{p \cdot lS}{T} = \frac{p' \cdot (l - \Delta l)S}{T}.$$

Разделив уравнения почленно, получим

$$\frac{l + \Delta l}{l - \Delta l} = \frac{T + \Delta T}{T},$$

откуда найдем приращение температуры

$$\Delta T = \frac{2T\Delta l}{l - \Delta l} = \text{ 40 К.}$$

Задача 14. *Баллон емкостью 40 л содержит сжатый воздух под давлением 18 МПа при 27°С. Какой объем (в л) воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если лодка находится на глубине 20 м, где температура 7°С? Атмосферное давление 0,1 МПа, g = 10 м/с*^{2}.

Из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT$$

следует, что любые два состояния одного и того же газа связаны соотношением

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

(объединенный газовый закон). В данном случае мы знаем все параметры начального состояния и конечную температуру, а конечное давление воздуха равно давлению воды на глубине, на которой находится подводная лодка (воздух выходит из баллона и вытесняет воду из подводной лодки до тех пор, пока его давление не сравняется с давлением воды)

$$p_2 = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 — атмосферное давление. Для объема воздуха в конечном состоянии получаем

$$V_2 = \frac{p_1 T_2}{(p_0 + \rho g h) T_1} V_1 = \text{ 2240 л.}$$

Объем вытесненной из подводной лодки воды — это объем воздуха вне баллона. Чтобы найти его, из полного объема воздуха надо вычесть объем баллона

$$V = V_2 - V_1 = 2200 \text{ л.}$$

Задача 15. *Какую массу (в г) водорода содержал баллон, если он взорвался при температуре 1172 К и был рассчитан на хранение азота массой 7 кг при температуре 293 К при десятикратном запасе прочности? Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, азота — 28 кг/кмоль.*

Обозначив p давление, при котором разрывается баллон, запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для водорода и азота

$$pV = \frac{m_\text{в}}{\text{М}_\text{в}} RT_\text{в}, \qquad \frac{p}{10} V = \frac{m_\text{а}}{\text{М}_\text{а}} RT_\text{а}.$$

Поделив уравнения почленно, найдем массу водорода

$$m_\text{в} = 10 m_\text{а} \frac{\text{М}_\text{в}}{\text{М}_\text{а}} \frac{T_\text{а}}{T_\text{в}} = 1250 \text{ г.}$$

Задача 16. *По газопроводу течет углекислый газ при давлении 0,83 МПа и температуре 27°С. Какова скорость течения газа в трубе, если за 2,5 мин через площадь поперечного сечения трубы 5 см^2 протекает 2,2 кг газа? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

Объем газа, который за время t проходит через поперечное сечение трубы, зависит от скорости течения

$$V = Svt.$$

Подставим это выражение в уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p(vSt) = \frac{m}{\text{М}} RT$$

и выразим скорость течения

$$v = \frac{mRT}{\text{М}pSt} = 2 \text{ м/с.}$$

Задача 17. *Баллон содержит газ при 27°С и давлении 200 кПа. Каково будет давление (в кПа), если из баллона выпустить 80% газа и охладить его до 12°С*?

Так как масса газа в баллоне меняется, то начальное и конечное состояния газа в баллоне нельзя связывать объединенным газовым законом (или уравнением изохорного процесса). Нужно для каждого состояния записать уравнение Клапейрона-Менделеева

$$p_1 V = \frac{m}{\text{М}} RT_1 \qquad p_2 V = \frac{0{,}2m}{\text{М}} RT_2$$

и, поделив эти уравнения друг на друга, найти конечное давление

$$p_2 = 0{,}2 p_1 \frac{T_2}{T_1} = \text{ 38 кПа.}$$

Задача 18. *Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом и находится при температуре 300 К. Когда один из сосудов был нагрет, а другой оставлен при прежней температуре, давление в системе увеличилось в 1,5 раза. На сколько градусов был нагрет один из сосудов*?

При нагревании газа в одном из сосудов часть газа перейдет в другой сосуд, причем ровно столько, чтобы давления в сосудах были одинаковыми. Однако общая масса газа в двух сосудах будет такой же, как до нагревания

$$m_1 + m_2 = 2m,$$

где m — начальная масса в каждом из сосудов, m_1, m_2 — масса газа в первом (нагретом) и во втором сосудах. Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для начального состояния газа и для конечного состояния в каждом сосуде

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT , \qquad p'V = \frac{m_1}{\mathrm{M}} RT_1 , \qquad p'V = \frac{m_2}{\mathrm{M}} RT ,$$

где $p' = 1{,}5p$ — конечное давление газа. Выразив массы газов и подставив их в уравнение сохранения массы, получим после сокращения

$$\frac{2}{T} = \frac{1{,}5}{T_1} + \frac{1{,}5}{T} ,$$

откуда находим $T_1 = 3T = 900$ К, т.е. первый сосуд нагрели на 600 К.

Задача 19. *При повышении температуры азота, заключенного в закрытый сосуд, от 7°С до 1407°С третья часть молекул азота распалась на атомы. Во сколько раз при этом возросло давление газа*?

Начальное давление выразим с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT .$$

Давление в конечном состоянии найдем исходя из закона Дальтона для парциальных давлений

$$p'V = (p_1' + p_2')V = \frac{2m/3}{\mathrm{M}} RT' + \frac{m/3}{\mathrm{M}/2} RT' = \frac{4}{3}\frac{m}{\mathrm{M}} RT'$$

(мы учли, что молярная масса одноатомного газа в два раза меньше, чем двухатомного). Получаем

$$\frac{p'}{p} = \frac{4}{3}\frac{T'}{T} = 8 .$$