

# Лабораторная работа № 342

## Определение постоянной Ридберга по спектру атомарного водорода

### Цель и содержание работы

Целью работы является ознакомление с закономерностями в спектре атомарного водорода. Работа состоит в градуировке спектроскопа, определении длин волн четырех спектральных линий серии Бальмера и расчете постоянной Ридберга.

### Теоретическое введение

#### Теория Бора. Формула Бальмера

Спектры излучения изолированных атомов, например, атомов разреженного одноатомного газа или паров металла, состоят из отдельных спектральных линий и носят название линейчатых. Относительная простота линейчатых спектров объясняется тем, что электроны, входящие в состав таких атомов, находятся под действием только внутриатомных сил и практически не испытывают возмущающего действия со стороны окружающих удаленных атомов.

Изучение линейчатых спектров показывает, что в расположении линий, образующих спектр, наблюдаются определённые закономерности: линии располагаются не беспорядочно, а группируются сериями. Впервые это было обнаружено Бальмером (1885 г.) для атома водорода. Сериальные закономерности в атомных спектрах присущи не только атому водорода, но и другим атомам и свидетельствуют о проявлении квантовых свойств излучающих атомных систем. Для атома водорода эти закономерности могут быть выражены с помощью соотношения (обобщенная формула Бальмера)

$$k = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (1)$$

$k$  – волновое число данной линии (величина, обратная длине волны  $\lambda$ );

$R$  – постоянная Ридберга, по экспериментальным данным равная  $R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $n$  и  $i$  – целые числа, причем  $i > n$ .

Формула (1) является обобщением зависимостей, полученных на опыте для отдельных серий спектральных линий.

Например, для серии Бальмера в видимой части спектра

$$k = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (2)$$

$i = 3, 4, 5, \dots$ ;

серии Лаймана в ультрафиолетовой области

$$k = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (3)$$

$i = 2, 3, 4, \dots$ ;

серии Пашена в инфракрасной области

$$k = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (4)$$

$i = 4, 5, 6, \dots$  и т. д.

Таким образом, в обобщенной формуле Бальмера (1) целое число  $n$  дает номер серии, а целое число  $i$  – номер линии в серии (рис. 1).

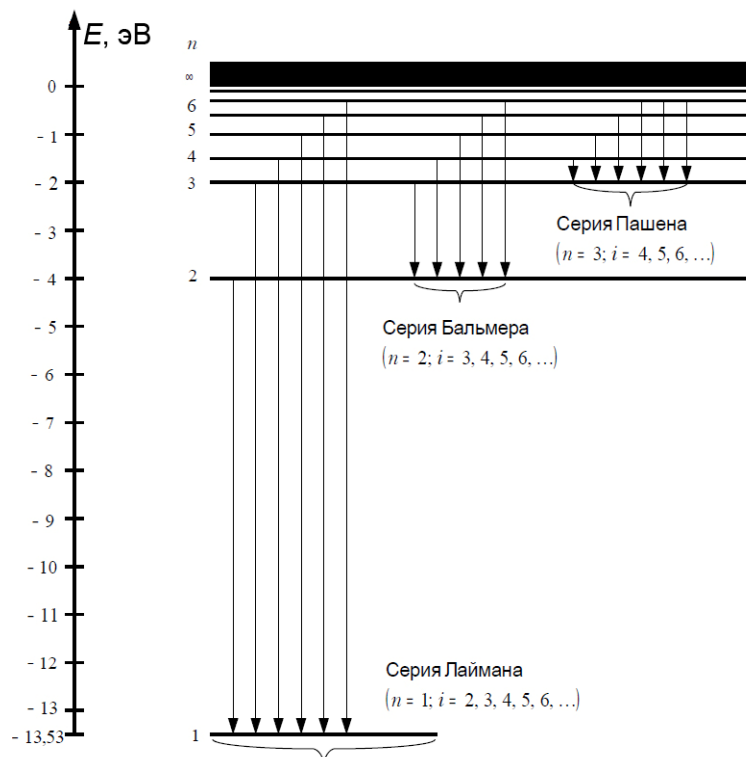


Рис. 1 Схема образования спектральных серий атомарного водорода

Спектральные закономерности атома водорода легко объясняются теорией Бора, которая строится на двух постулатах:

1. Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются в действительности только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Электрон, находящийся на одной из этих орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает электромагнитных волн.

*Правило квантования круговых орбит:* из всех орбит электрона, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются только те, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка

$$L = n\hbar \quad (5)$$

2. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта энергии  $h\nu$  при переходе электрона из одного стационарного (устойчивого) состояния в другое. Величина светового кванта равна разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается квантовый скачок электрона:

$$h\nu_{in} = E_i - E_n$$

Получим выражение для полной энергии электрона, исходя из теории Бора. Исходными уравнениями будут условие квантования и второй закон Ньютона

$$\begin{cases} mv_n r_n = n\hbar \\ m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \end{cases} \Rightarrow \text{получаем выражения для скорости и радиуса} \begin{cases} v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n} \\ r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \cdot n^2 \end{cases}$$

здесь  $m$  – масса электрона,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $e$  – элементарный электрический заряд. Из выражений для скорости электрона и радиуса орбиты получим выражения для полной энергии электрона на  $n$ -й орбите :

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

Используя второй постулат Бора, получим выражение для энергии фотона, возникающего при переходе электрона с  $i$ -й орбиты на  $n$ -ю ( $i > n$ )

$$h\nu_{in} = E_i - E_n = \frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right).$$

Можно также получить выражение для волнового числа фотона:

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_0^2c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right). \quad (7)$$

Численное значение константы, стоящее перед скобкой в формуле (7), в точности совпадает с экспериментально полученным значением постоянной Ридберга. Таким образом, теория Бора позволяет почти классическим образом описать поведение электрона в атоме водорода и объяснить устойчивость атомов.

Теория Бора имела огромный успех, и естественно, были попытки применить эту теорию к другим атомам, кроме водорода. Также теорию Бора можно применить к водородоподобным ионам – системам, состоящим из ядра и одного-единственного электрона. Для таких систем формулы модифицируются незначительно:

$$k = Rz^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (8)$$

где  $z$  – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Оказалось, что для атомов и ионов, имеющих более одного электрона, теория Бора дает результаты, не совпадающие с экспериментом. Поэтому возникла необходимость разработки новой теории, позволяющей описать электронные свойства атомов и микрочастиц – квантовой теории. Теория Бора является переходным этапом между классическим описанием поведения частиц и квантовой механикой, и в настоящее время имеет огромное историческое значение.

### Элементы квантовой механики. Квантовомеханическая теория атома водорода

*Ψ - функция и ее статистический смысл.*

В соответствии с формализмом квантовой механики поведение любой микрочастицы описывается волновой функцией  $\Psi(x,y,z,t)$ . Форма этого описания является статистической. Это означает, что знание волновой функции не позволяет судить о состоянии микрочастицы и её дальнейшем поведении детерминированным образом. Характер вытекающих из знания волновой функции сведений *вероятностный*. А именно: квадрат модуля волновой функции  $|\Psi|^2$  даёт значение плотности вероятности нахождения микрочастицы в точке пространства с координатами  $(x,y,z)$  в момент времени  $t$ . *Плотность вероятности* – это вероятность  $dP$  нахождения частицы в элементарном объёме  $dV$ , делённая на этот объём, то есть  $\frac{dP}{dV}$ . В этом заключается её физический смысл. Зная плотность вероятности, можно найти вероятность  $P$  нахождения частицы в конечном объёме  $\Delta V$ :

$$P = \int_{\Delta V} |\Psi|^2 dV \quad (9)$$

Вероятность нахождения частицы в бесконечно большом объёме естественно равна единице (вероятность достоверного события). Отсюда вытекает условие, которому должна удовлетворять функция  $\Psi$  (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,y,z,t)|^2 dx dy dz = 1 \quad (10)$$

Если состояние частицы стационарно, то есть не зависит от времени (именно такие состояния мы и будем рассматривать), то функция  $\Psi$  распадается на два независимых множителя:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{j\omega t}$$

первый из которых не зависит от времени, а второй зависит от времени по гармоническому закону, здесь  $j$  – мнимая единица.

#### *Уравнение Шрёдингера.*

Для нахождения волновой функции служит так называемое *уравнение Шрёдингера*, которое для случая стационарных состояний имеет следующий вид:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (11)$$

где  $E$  – полная, а  $U$  – потенциальная энергия частицы;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в декартовой системе координат.

#### *Стандартные условия.*

Для того чтобы  $\Psi$ -функция имела тот физический смысл, который ей предписывается, она должна быть однозначной, непрерывной и конечной, а также иметь непрерывную и конечную производную. Эти требования, накладываемые на  $\Psi$ -функцию, называются *стандартными*.

#### *Квантование энергии.*

Уравнение Шрёдингера содержит в качестве параметра полную энергию  $E$ . Возможны случаи, когда его решения, удовлетворяющие стандартным условиям, существуют не при всех значениях параметра  $E$ , а лишь при некоторых избранных (собственных значениях), образующих дискретный набор. Таким образом, квантование энергии вытекает из самих основ квантовой механики.

#### *Уравнение Шрёдингера для электрона в атоме водорода.*

Потенциальная энергия электрона в атоме водорода равна:

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Подставив её выражение в уравнение (11), получим уравнение Шрёдингера для электрона в атоме водорода:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\Psi = 0 \quad (12)$$

Для того, чтобы решение уравнения Шрёдингера (12) удовлетворяло стандартным условиям, полная энергия электрона, связанного с ядром (протоном) в атоме водорода, должна быть отрицательной и дискретной. Решение уравнения (12) даёт для неё следующее выражение:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (13)$$

Формула (13) совпадает с формулой (7) боровской теории. Однако она получена исходя из основных принципов квантовой механики, и может быть дополнена с учетом различных факторов (спин электрона, внешние электрические и магнитные поля, и т.д.)

#### *Квантовые числа. Орбитальный момент импульса электрона.*

Решением уравнения (12) являются  $\Psi$ -функции, которые зависят от трёх целочисленных параметров:  $n, l, m$ . Они называются *квантовыми числами*:

$n$  – *главное квантовое число*, определяющее номер уровня энергии и её значение, оно принимает целые значения: 1, 2, 3, ...;

$l$  – *азимутальное квантовое число*, которое может иметь значения  $l=0, 1, \dots, n-1$ . которое определяет момент импульса электрона, связанный с его движением вокруг ядра (*орбитальным движением*), по формуле

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (14)$$

Обратите внимание, что при больших  $n$  и  $l=n-1$   $L = \hbar \sqrt{(n-1)n} \approx \hbar n$ , что совпадает с условием квантования Боровских орбит. Таким образом, теория Бора хорошо описывает электроны, находящиеся в возбужденном состоянии на высоких орбитах. Атомы с такими электронами называются Ридберговскими атомами.

$m$  – *магнитное квантовое число*, которое определяет проекцию орбитального момента импульса на некоторое направление  $z$  по формуле

$$L_z = \hbar m$$

и может принимать значения от  $-l$  до  $+l$  (всего  $2l+1$  значений).

Таким образом, мы видим, что дискретность присуща не только энергии, но и моменту импульса и его проекции. В отличие от обычного вектора в классической механике, у которого мы можем определить проекции на три оси, у квантовомеханического момента импульса определен только модуль и проекция на одну из осей, для остальных двух проекций есть соотношение неопределенностей.

*Магнитный момент электрона.*

Электрон, двигаясь вокруг ядра в атоме водорода, обладает моментом импульса. Известно, что всякая заряженная частица, обладающая моментом импульса, должна обладать и магнитным моментом причём отношение этих моментов, которое называется *гиромагнитным отношением*, равно (по абсолютной величине):

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} \quad (15)$$

тогда

$$p_m = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \quad (16)$$

Величина  $\mu_B$  носит название *магнетона Бора*. Проекция магнитного момента на ось  $z$  может быть вычислена по формуле

$$p_{mz} = \mu_B m \quad (17)$$

В атомной физике применяются следующие условные обозначения для состояний электрона с различными значениями азимутального квантового числа  $l$ : буква  $s$  соответствует  $l=0$ ,  $p \leftrightarrow l=1$ ,  $d \leftrightarrow l=2$ ,  $f \leftrightarrow l=3$ ,  $g \leftrightarrow l=4$  и так далее по алфавиту. Таким образом, возможные состояния электрона в атоме водорода записываются следующим образом (цифры обозначают главное квантовое число): 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d .. и т.д.

Испускание и поглощение света происходит при переходе электрона из одного состояния в другое, отличающееся от первого значением энергии. Это сопровождается изменением главного квантового числа  $n$ . В то же время изменяется и азимутальное квантовое число  $l$ , причём его изменение подчиняется *правилу отбора*, которое вытекает из закона сохранения момента импульса:

$$\Delta l = \pm 1 \quad (18)$$

С учётом вышеизложенного возможные, с точки зрения квантовой механики, переходы можно объединить в серии, которые уже рассматривались при анализе экспериментальных данных и которые подчиняются эмпирической формуле Бальмера:

$np \rightarrow 1s$  ( $n = 2, 3, \dots$ )      серия Пашена;

$\left. \begin{matrix} ns \\ nd \end{matrix} \right\} \rightarrow 2p$  ( $n = 3, 4, \dots$ )      серия Бальмера

и т.д. Таким образом, демонстрируется согласованность выводов квантовой механики и эксперимента.

### Вывод расчетной формулы

Постоянную Ридберга можно найти с помощью формулы (1), определив экспериментальным путем длины волн в какой-либо серии. Наиболее удобно это сделать в видимой области спектра, то есть для серии Бальмера.

В настоящей работе определяются длины волн первых четырех наиболее ярких спектральных линий этой серии, для которой  $i$  принимает значения: 3 (красная линия), 4 (голубая), 5 (фиолетовая), 6 (тёмно-фиолетовая, слабозначимая). Таким образом, постоянная Ридберга определяется из четырех независимых измерений по формуле

$$R = \frac{1}{\lambda \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{i^2} \right)} \quad (19)$$

$i=3, 4, 5, 6$ .

### Приборы и принадлежности для выполнения работы

Установка, используемая в работе, состоит из монохроматора УМ-2 и двух спектральных ламп – ртутной и водородной, питание которых осуществляется от специальных устройств.

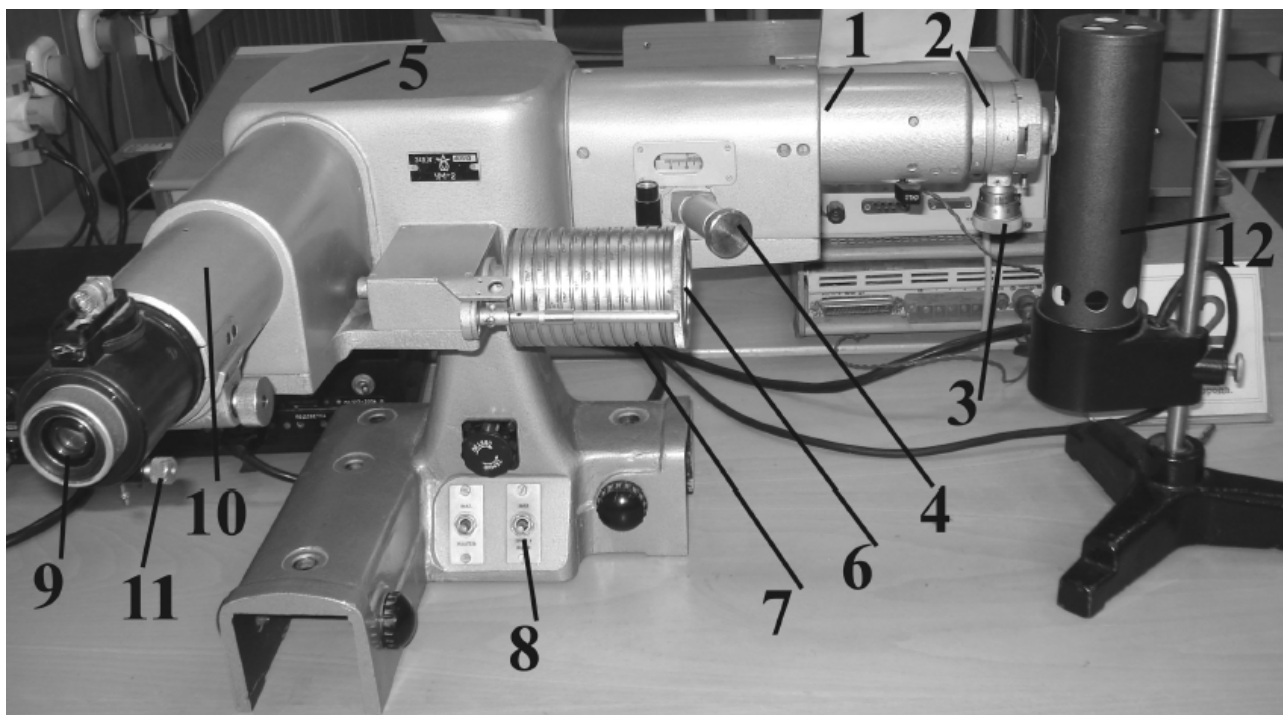


Рис. 2. Экспериментальная установка. 1 – коллиматор, 2 – щель, ширина которой регулируется микрометрическим винтом 3. Винт 4 служит для фокусировки изображения спектральных линий. Поворот призмы 5 осуществляется вращением барабана 6. В зависимости от положения призмы в поле зрения попадает тот или иной участок спектра. На барабане нанесена шкала в относительных делениях – градусах поворота самого барабана. Шкала барабана освещается лампочкой 7, включение которой производится тумблером 8. В фокальной плоскости окуляра 9 зрительной трубы 10 находится указатель 11 (см. рис. 3 – указатель 7), 12 – ртутная лампа.

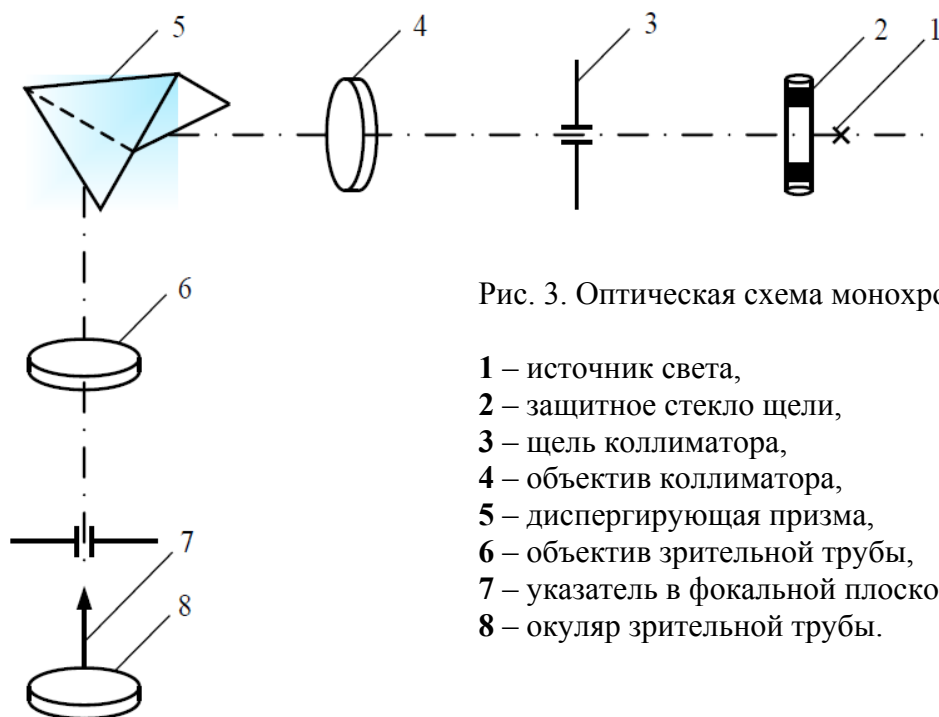


Рис. 3. Оптическая схема монохроматора

- 1 – источник света,
- 2 – защитное стекло щели,
- 3 – щель коллиматора,
- 4 – объектив коллиматора,
- 5 – диспергирующая призма,
- 6 – объектив зрительной трубы,
- 7 – указатель в фокальной плоскости окуляра,
- 8 – окуляр зрительной трубы.

*Монохроматор* служит в данном случае в качестве спектро스코па, так как выходная щель монохроматора заменена окуляром, что позволяет наблюдать спектр визуально, в частности для определения длин волн линий в спектре водорода. Оптическая схема монохроматора показана на рис. 3.

*Ртутная лампа.* Для того чтобы привести в соответствие деления шкалы барабана с длинами волн, монохроматор необходимо проградуировать. Для градуировки используется газоразрядная ртутная лампа с линейчатым спектром излучения. Включение лампы производит лаборант. Объектив коллиматора, в фокусе которого находится щель, образует параллельный пучок света и направляет его на призму. Призма преобразует этот пучок в систему параллельных пучков, выходящих из диспергирующего элемента под различными углами, зависящими от длины волны. Объектив зрительной трубы фокусирует отдельные параллельные пучки и образует в фокальной плоскости совокупность монохроматических цветных изображений входной щели, которые и представляют собой спектры, наблюдаемые с помощью окуляра.

Также рядом с установкой имеется таблица с изображением линий ртути в видимой области спектра и указанием их длин волн.

## Порядок выполнения работы

### 1. Градуировка монохроматора

Установить против щели монохроматора ртутную лампу и попросить лаборанта её включить. Вращая винт 4 и перемещая окуляр 9, получить чёткое изображение спектральных линий.

Поворачивая барабан 6, совместить изображение спектральных линий с указателем и произвести отсчет делений по шкале барабана. Эта операция необходима для всех линий, указанных в таблице, имеющейся на установке. Для правильной градуировки очень важно осуществить отсчёт делений по шкале барабана именно для тех линий, которые изображены на этой таблице и для которых указана длина волны. Данные занести в таблицу 1. Для каждой линии отсчет по шкале барабана сделать 3 раза, причём линия к указателю подводится со стороны больших длин волн. Снять показания для 13 линий в спектре ртути.

Таблица 1.

№ п/п	Спектральная линия (цвет)	Длина волны, нм	Деления шкалы барабана	Среднее значение делений шкалы барабана
1			1. 2. 3.	
2			1. 2. 3.	
...	....	...	...	...
13			1. 2. 3.	

## 2. Определение длин волн излучения атомарного водорода

Попросите лаборанта выключить ртутную лампу и поставить водородную лампу. Настройте окуляр так, чтобы увидеть четыре ярких линии спектра водорода. Вращением барабана совместить с указателем поочередно изображение четырех наиболее ярких линий водорода и произвести отсчёт по шкале барабана. Для каждой линии необходимо сделать отсчёт не менее трех раз, подводя линию к указателю со стороны больших длин волн. Данные занести в таблицу 2.

Таблица 2.

№	Спектральная линия	Деления шкалы барабана	Среднее значение делений шкалы барабана	Длина волны, нм
1		1. 2. 3.		
2		1. 2. 3.		
3		1. 2. 3.		
4		1. 2. 3.		

## Обработка результатов измерений

1. Построить на миллиметровой бумаге градуировочный график, по оси абсцисс которого идет среднее значение делений шкалы барабана, а по оси ординат – длина волны, данные берутся из таблицы 1. График должен быть выполнен очень аккуратно, размером не менее формата А4. Нанесенные на график точки соединить плавной линией.

2. Определить по градуировочному графику длины волн четырех измеренных линий спектра водорода и занести их в последний столбец таблицы 2.

3. Для каждой полученной длины волны  $\lambda$  рассчитать постоянную Ридберга  $R$  по формуле (19). Должно получиться 4 значения постоянной Ридберга

4. Рассчитать среднее значение постоянной Ридберга  $\bar{R}$  и погрешность  $\Delta R$  по методике расчета погрешности прямых измерений (см. лабораторную работу № 100), округлить результат до нужного количества значащих цифр.

5. Записать результат измерений в виде  $\bar{R} \pm \Delta R \text{ м}^{-1}$



## Контрольные вопросы

1. При каких условиях возникают линейчатые спектры?
2. Какова модель атома по теории Резерфорда-Бора? Сформулируйте постулаты Бора.
3. Получите выражения для радиусов стационарных орбит электрона в водородоподобном ионе на основе теории Бора
4. Получите выражения для скоростей электрона на стационарных орбитах в водородоподобном ионе на основе теории Бора.
5. Выведите на основе теории Бора формулу для энергии электрона на  $n$ -ой орбите. Объясните смысл отрицательного значения энергии электрона в атоме.
6. Выведите формулу для константы Ридберга на основе теории Бора.
7. Каковы трудности теории Бора?
8. Объясните устройство монохроматора
9. Как производится градуировка монохроматора?
10. Что такое  $\Psi$ -функция и каков ее статистический смысл?
11. Объясните, как происходит квантование момента импульса в квантовой механике. Сравните его с квантованием по Бору.
12. Напишите уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода. От каких квантовых чисел зависит решение этого уравнения? Каков их смысл?
13. Какую скорость приобретет первоначально покоившийся атом водорода при испускании фотона, соответствующего головной линии: 1) серии Лаймана, 2) серии Бальмера?
14. Напишите выражение для магнетона Бора. Что это за величина? В каких единицах в СИ она измеряется?

## Литература

Савельев И.В. Курс общей физики Т. 3