

# Лабораторная работа № 342

## Определение постоянной Ридберга по спектру атомарного водорода

### Цель и содержание работы

Целью работы является ознакомление с закономерностями в спектре атомарного водорода. Работа состоит в градуировке спектроскопа, определении длин волн четырех спектральных линий серии Бальмера и расчете постоянной Ридберга.

### Теоретическое введение

#### Теория Бора. Формула Бальмера

Спектры излучения изолированных атомов, например, атомов разреженного одноатомного газа или паров металла, состоят из отдельных спектральных линий и носят название линейчатых. Относительная простота линейчатых спектров объясняется тем, что электроны, входящие в состав таких атомов, находятся под действием только внутриатомных сил и практически не испытывают возмущающего действия со стороны окружающих удаленных атомов.

Изучение линейчатых спектров показывает, что в расположении линий, образующих спектр, наблюдаются определенные закономерности: линии располагаются не беспорядочно, а группируются сериями. Впервые это было обнаружено Бальмером (1885 г.) для атома водорода. Сериальные закономерности в атомных спектрах присущи не только атому водорода, но и другим атомам и свидетельствуют о проявлении квантовых свойств излучающих атомных систем. Для атома водорода эти закономерности могут быть выражены с помощью соотношения (обобщенная формула Бальмера)

$$k = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (1)$$

$k$  – волновое число данной линии (величина, обратная длине волны  $\lambda$ );

$R$  – постоянная Ридберга, по экспериментальным данным равная  $R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ,  $n$  и  $i$  – целые числа, причем  $i > n$ .

Формула (1) является обобщением зависимостей, полученных на опыте для отдельных серий спектральных линий.

Например, для серии Бальмера в видимой части спектра

$$k = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (2)$$

$i = 3, 4, 5, \dots$ ;

серии Лаймана в ультрафиолетовой области

$$k = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (3)$$

$i = 2, 3, 4, \dots$ ;

серии Пашена в инфракрасной области

$$k = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (4)$$

$i = 4, 5, 6, \dots$  и т. д.

Таким образом, в обобщенной формуле Бальмера (1) целое число  $n$  дает номер серии, а целое число  $i$  – номер линии в серии (рис. 1).

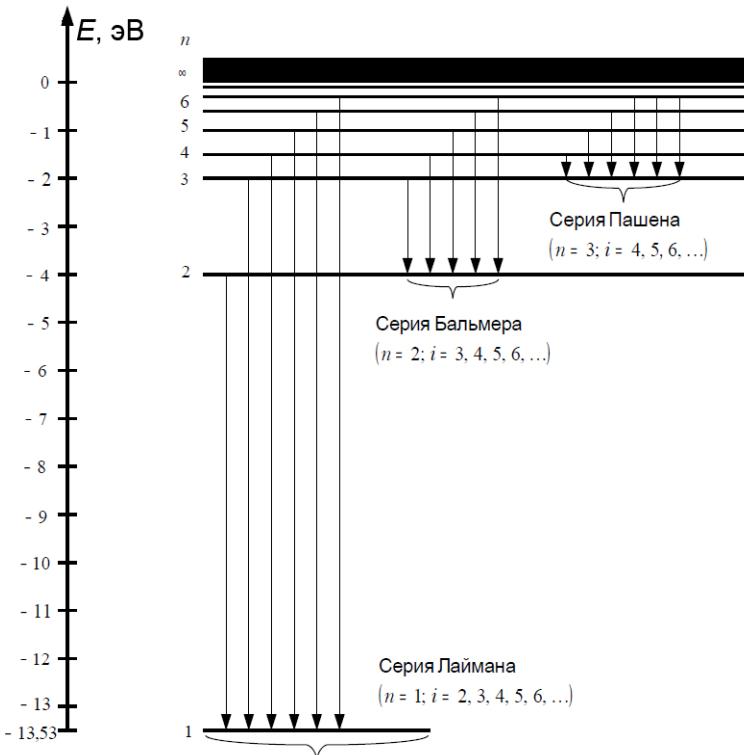


Рис. 1 Схема образования спектральных серий атомарного водорода

Спектральные закономерности атома водорода легко объясняются теорией Бора, которая строится на двух постулатах:

1. Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются в действительности только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие определенным квантовым условиям. Электрон, находящийся на одной из этих орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает электромагнитных волн.

*Правило квантования круговых орбит:* из всех орбит электрона, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются только те, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка

$$L = n\hbar \quad (5)$$

2. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта энергии  $h\nu$  при переходе электрона из одного стационарного (устойчивого) состояния в другое. Величина светового кванта равна разности энергий тех стационарных состояний, между которыми совершается квантовый скачок электрона:

$$h\nu_{in} = E_i - E_n$$

Получим выражение для полной энергии электрона, исходя из теории Бора. Исходными уравнениями будут условие квантования и второй закон Ньютона

$$\begin{cases} mv_n r_n = n\hbar \\ m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \end{cases} \Rightarrow \text{получаем выражения для скорости и радиуса} \quad \begin{cases} v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n} \\ r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \cdot n^2 \end{cases}$$

здесь  $m$  – масса электрона,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $e$  – элементарный электрический заряд. Из выражений для скорости и радиуса орбиты получим выражения для полной энергии электрона на  $n$ -й орбите :

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (6)$$

Используя второй постулат Бора, получим выражение для энергии фотона, возникающего при переходе электрона с  $i$ -й орбиты на  $n$ -ю ( $i > n$ )

$$h\nu_{in} = E_i - E_n = \frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\varepsilon_o^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right).$$

Можно также получить выражение для волнового числа фотона:

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_o^2 c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right). \quad (7)$$

Численное значение константы, стоящее перед скобкой в формуле (7), в точности совпадает с экспериментально полученным значением постоянной Ридберга. Таким образом, теория Бора позволяет почти классическим образом описать поведение электрона в атоме водорода и объяснить устойчивость атомов.

Теория Бора имела огромный успех, и естественно, были попытки применить эту теорию к другим атомам, кроме водорода. Также теорию Бора можно применить к водородоподобным ионам – системам, состоящим из ядра и одного-единственного электрона. Для таких систем формулы модифицируются незначительно:

$$k = Rz^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{i^2} \right) \quad (8)$$

где  $z$  – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Оказалось, что для атомов и ионов, имеющих более одного электрона, теория Бора дает результаты, не совпадающие с экспериментом. Поэтому возникла необходимость разработки новой теории, позволяющей описать электронные свойства атомов и микрочастиц – квантовой теории. Теория Бора является переходным этапом между классическим описанием поведения частиц и квантовой механикой, и в настоящее время имеет огромное историческое значение.

### Элементы квантовой механики. Квантовомеханическая теория атома водорода $\Psi$ - функция и ее статистический смысл.

В соответствии с формализмом квантовой механики поведение любой микрочастицы описывается волновой функцией  $\Psi(x, y, z, t)$ . Форма этого описания является статистической. Это означает, что знание волновой функции не позволяет судить о состоянии микрочастицы и её дальнейшем поведении детерминированным образом. Характер вытекающих из знания волновой функции сведений *вероятностный*. А именно: квадрат модуля волновой функции  $|\Psi|^2$  даёт значение плотности вероятности нахождения микрочастицы в точке пространства с координатами  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ . *Плотность вероятности* – это вероятность  $dP$  нахождения частицы в элементарном объёме  $dV$ , делённая на этот объём, то есть  $\frac{dP}{dV}$ . В этом заключается её физический смысл. Зная плотность вероятности, можно найти вероятность  $P$  нахождения частицы в конечном объёме  $\Delta V$ :

$$P = \int_{\Delta V} |\Psi|^2 dV \quad (9)$$

Вероятность нахождения частицы в бесконечно большом объёме естественно равна единице (вероятность достоверного события). Отсюда вытекает условие, которому должна удовлетворять функция  $\Psi$  (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = 1 \quad (10)$$

Если состояние частицы стационарно, то есть не зависит от времени (именно такие состояния мы и будем рассматривать), то функция  $\Psi$  распадается на два независимых множителя:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{i\omega t}$$

первый из которых не зависит от времени, а второй зависит от времени по гармоническому закону, здесь  $i$  – мнимая единица.

### *Уравнение Шрёдингера.*

Для нахождения волновой функции служит так называемое *уравнение Шрёдингера*, которое для случая стационарных состояний имеет следующий вид:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (11)$$

где  $E$  – полная, а  $U$  – потенциальная энергия частицы;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в декартовой системе координат.

### *Стандартные условия.*

Для того чтобы  $\Psi$ -функция имела тот физический смысл, который ей предписывается, она должна быть однозначной, непрерывной и конечной, а также иметь непрерывную и конечную производную. Эти требования, накладываемые на  $\Psi$ -функцию, называются *стандартными*.

### *Квантование энергии.*

Уравнение Шрёдингера содержит в качестве параметра полную энергию  $E$ . Возможны случаи, когда его решения, удовлетворяющие стандартным условиям, существуют не при всех значениях параметра  $E$ , а лишь при некоторых избранных (собственных значениях), образующих дискретный набор. Таким образом, квантование энергии вытекает из самих основ квантовой механики.

### *Уравнение Шрёдингера для электрона в атоме водорода.*

Потенциальная энергия электрона в атоме водорода равна:

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Подставив её выражение в уравнение (11), получим уравнение Шрёдингера для электрона в атоме водорода:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\Psi = 0 \quad (12)$$

Для того, чтобы решение уравнения Шрёдингера (12) удовлетворяло стандартным условиям, полная энергия электрона, связанного с ядром (протоном) в атоме водорода, должна быть отрицательной и дискретной. Решение уравнения (12) даёт для неё следующее выражение:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (13)$$

Формула (13) совпадает с формулой (7) боровской теории. Однако она получена исходя из основных принципов квантовой механики, и может быть дополнена с учетом различных факторов (спин электрона, внешние электрические и магнитные поля, и т.д.)

### *Квантовые числа. Орбитальный момент импульса электрона.*

Решением уравнения (12) являются  $\Psi$ -функции, которые зависят от трёх целочисленных параметров:  $n, l, m$ . Они называются *квантовыми числами*:

*n* – главное квантовое число, определяющее номер уровня энергии и её значение, оно принимает целые значения: 1, 2, 3, ...;

*l* – азимутальное квантовое число, которое может иметь значения  $l=0,1, \dots, n-1$ , которое определяет момент импульса электрона, связанный с его движением вокруг ядра (орбитальным движением), по формуле

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (14)$$

Обратите внимание, что при больших *n* и  $l=n-1$   $L = \hbar \sqrt{(n-1)n} \approx \hbar n$ , что совпадает с условием квантования Боровских орбит. Таким образом, теория Бора хорошо описывает электроны, находящиеся в возбужденном состоянии на высоких орбитах. Атомы с такими электронами называются Ридберговскими атомами.

*m* – магнитное квантовое число, которое определяет проекцию орбитального момента импульса на некоторое направление *z* по формуле

$$L_z = \hbar m$$

и может принимать значения от  $-l$  до  $+l$  (всего  $2l+1$  значений).

Таким образом, мы видим, что дискретность присуща не только энергии, но и моменту импульса и его проекции. В отличие от обычного вектора в классической механике, у которого мы можем определить проекции на три оси, у квантовомеханического момента импульса определен только модуль и проекция на одну из осей, для остальных двух проекций есть соотношение неопределенностей.

#### *Магнитный момент электрона.*

Электрон, двигаясь вокруг ядра в атоме водорода, обладает моментом импульса. Известно, что всякая заряженная частица, обладающая моментом импульса, должна обладать и магнитным моментом причём отношение этих моментов, которое называется *гиромагнитным отношением*, равно (по абсолютной величине):

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} \quad (15)$$

тогда

$$p_m = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)} \quad (16)$$

Величина  $\mu_B$  носит название *магнетона Бора*. Проекция магнитного момента на ось *z* может быть вычислена по формуле

$$p_{mz} = \mu_B m \quad (17)$$

В атомной физике применяются следующие условные обозначения для состояний электрона с различными значениями азимутального квантового числа *l*: буква *s* соответствует  $l=0$ , *p*  $\leftrightarrow$   $l=1$ , *d*  $\leftrightarrow$   $l=2$ , *f*  $\leftrightarrow$   $l=3$ , *g*  $\leftrightarrow$   $l=4$  и так далее по алфавиту. Таким образом, возможные состояния электрона в атоме водорода записываются следующим образом (цифры обозначают главное квантовое число): 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d .. и т.д.

Испускание и поглощение света происходит при переходе электрона из одного состояния в другое, отличающееся от первого значением энергии. Это сопровождается изменением главного квантового числа *n*. В то же время изменяется и азимутальное квантовое число *l*, причём его изменение подчиняется *правилу отбора*, которое вытекает из закона сохранения момента импульса:

$$\Delta l = \pm 1 \quad (18)$$

С учётом вышеизложенного возможные, с точки зрения квантовой механики, переходы можно объединить в серии, которые уже рассматривались при анализе экспериментальных данных и которые подчиняются эмпирической формуле Бальмера:

$np \rightarrow 1s (n = 2, 3, \dots)$  серия Пашена;

$ns \left. \begin{array}{l} \\ nd \end{array} \right\} \rightarrow 2p (n = 3, 4, \dots)$  серия Бальмера

и т.д. Таким образом, демонстрируется согласованность выводов квантовой механики и эксперимента.

### Вывод расчетной формулы

Постоянную Ридберга можно найти с помощью формулы (1), определив экспериментальным путем длины волн в какой-либо серии. Наиболее удобно это сделать в видимой области спектра, то есть для серии Бальмера.

В настоящей работе определяются длины волн первых четырех наиболее ярких спектральных линий этой серии, для которой  $i$  принимает значения: 3 (красная линия), 4 (голубая), 5 (фиолетовая), 6 (тёмно-фиолетовая, слаборазличимая). Таким образом, постоянная Ридберга определяется из четырех независимых измерений по формуле

$$R = \frac{1}{\lambda \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{i^2} \right)} \quad (19)$$

$i = 3, 4, 5, 6$ .

### Приборы и принадлежности для выполнения работы

Установка, используемая в работе, состоит из монохроматора УМ-2 и двух спектральных ламп – ртутной и водородной, питание которых осуществляется от специальных устройств.

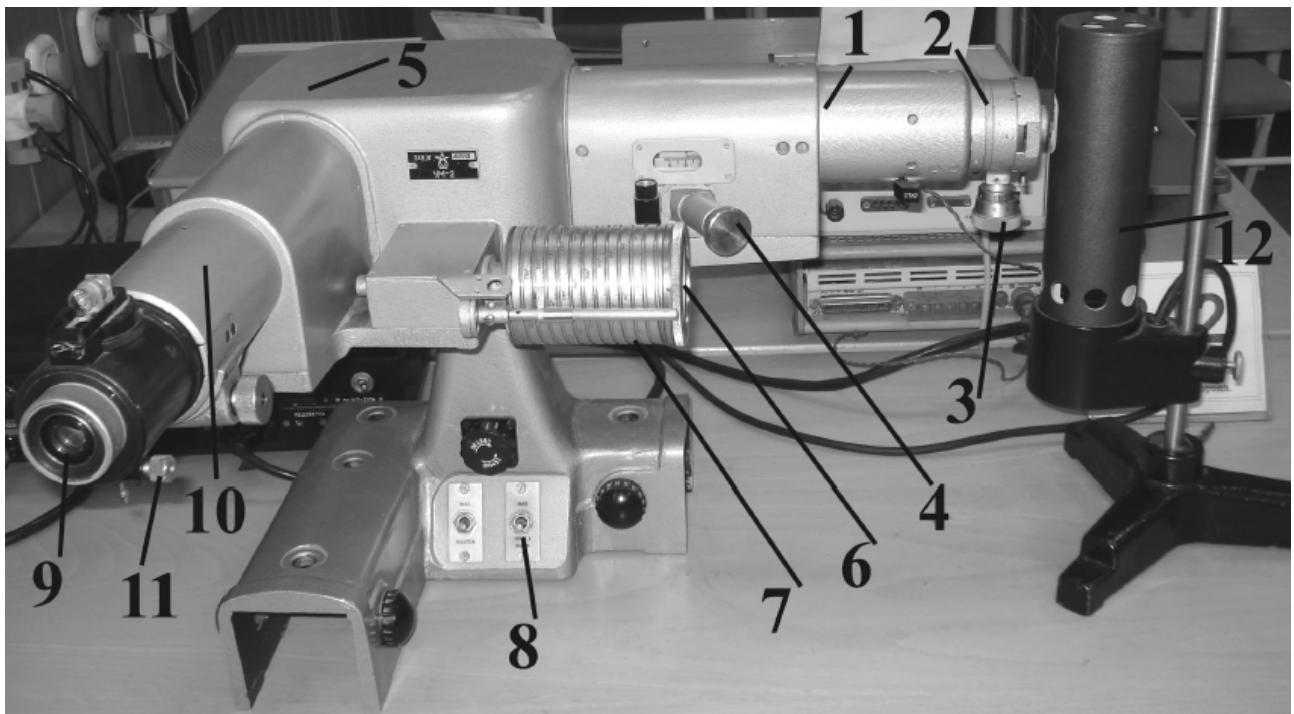


Рис. 2. Экспериментальная установка. 1 – коллиматор, 2 – щель, ширина которой регулируется микрометрическим винтом 3. Винт 4 служит для фокусировки изображения спектральных линий. Поворот призмы 5 осуществляется вращением барабана 6. В зависимости от положения призмы в поле зрения попадает тот или иной участок спектра. На барабане нанесена шкала в относительных делениях – градусах поворота самого барабана. Шкала барабана освещается лампочкой 7, включение которой производится тумблером 8. В фокальной плоскости окуляра 9 зрительной трубы 10 находится указатель 11 (см. рис. 3 – указатель 7), 12 – ртутная лампа.

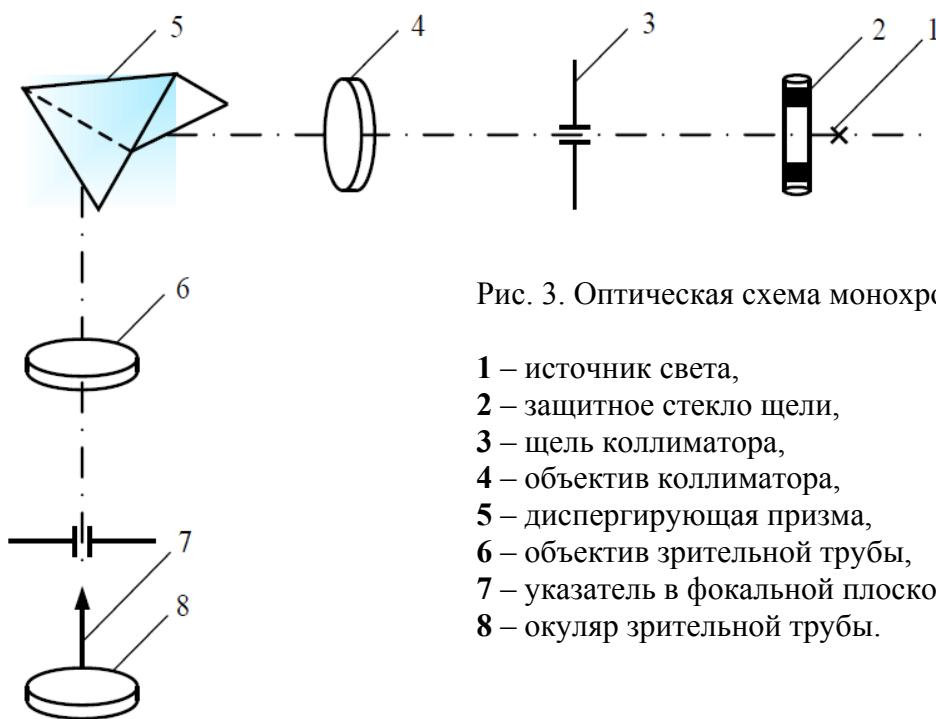


Рис. 3. Оптическая схема монохроматора

- 1 – источник света,
- 2 – защитное стекло щели,
- 3 – щель коллиматора,
- 4 – объектив коллиматора,
- 5 – диспергирующая призма,
- 6 – объектив зрительной трубы,
- 7 – указатель в фокальной плоскости окуляра,
- 8 – окуляр зрительной трубы.

*Монохроматор* служит в данном случае в качестве спектроскопа, так как выходная щель монохроматора заменена окуляром, что позволяет наблюдать спектр визуально, в частности для определения длин волн линий в спектре водорода. Оптическая схема монохроматора показана на рис. 3.

*Ртутная лампа.* Для того чтобы привести в соответствие деления шкалы барабана с длинами волн, монохроматор необходимо проградуировать. Для градуировки используется газоразрядная ртутная лампа с линейчатым спектром излучения. Включение лампы производит лаборант. Объектив коллиматора, в фокусе которого находится щель, образует параллельный пучок света и направляет его на призму. Призма преобразует этот пучок в систему параллельных пучков, выходящих из диспергирующего элемента под различными углами, зависящими от длины волны. Объектив зрительной трубы фокусирует отдельные параллельные пучки и образует в фокальной плоскости совокупность монохроматических цветных изображений входной щели, которые и представляют собой спектры, наблюдаемые с помощью окуляра.

Также рядом с установкой имеется таблица с изображением линий ртути в видимой области спектра и указанием их длин волн.

## Порядок выполнения работы

### 1. Градуировка монохроматора

Установить против щели монохроматора ртутную лампу и попросить лаборанта её включить. Вращая винт 4 и перемещая окуляр 9, получить чёткое изображение спектральных линий.

Поворачивая барабан 6, совместить изображение спектральных линий с указателем и произвести отсчет делений по шкале барабана. Эта операция необходима для всех линий, указанных в таблице, имеющейся на установке. Для правильной градуировки очень важно осуществить отсчёт делений по шкале барабана именно для тех линий, которые изображены на этой таблице и для которых указана длина волн. Данные занести в таблицу 1. Для каждой линии отсчет по шкале барабана сделать 3 раза, причём линия к указателю подводится со стороны больших длин волн. Снять показания для 13 линий в спектре ртути.

**Таблица 1.**

№ п/п	Спектральная линия (цвет)	Длина волны, нм	Деления шкалы барабана	Среднее значение делений шкалы барабана
1			1. 2. 3.	
2			1. 2. 3.	
...	....	...	...	...
13			1. 2. 3.	

**2. Определение длин волн излучения атомарного водорода**

Попросите лаборанта выключить ртутную лампу и поставить водородную лампу. Настройте окуляр так, чтобы увидеть четыре ярких линии спектра водорода. Вращением барабана совместить с указателем поочередно изображение четырех наиболее ярких линий водорода и произвести отсчет по шкале барабана. Для каждой линии необходимо сделать отсчет не менее трех раз, подводя линию к указателю со стороны больших длин волн. Данные занести в таблицу 2.

**Таблица 2.**

№	Спектральная линия	Деления шкалы барабана	Среднее значение делений шкалы барабана	Длина волны, нм
1		1. 2. 3.		
2		1. 2. 3.		
3		1. 2. 3.		
4		1. 2. 3.		

**Обработка результатов измерений**

- Построить на миллиметровой бумаге градуировочный график, по оси абсцисс которого идет среднее значение делений шкалы барабана, а по оси ординат – длина волны, данные берутся из таблицы 1. График должен быть выполнен очень аккуратно, размером не менее формата А4. Нанесенные на график точки соединить плавной линией.
- Определить по градуировочному графику длины волн четырех измеренных линий спектра водорода и занести их в последний столбец таблицы 2.
- Для каждой полученной длины волны  $\lambda$  рассчитать постоянную Ридберга  $R$  по формуле (19). Должно получиться 4 значения постоянной Ридберга
- Рассчитать среднее значение постоянной Ридберга  $\bar{R}$  и погрешность  $\Delta R$  по методике расчета погрешности прямых измерений (см. лабораторную работу № 100), округлить результат до нужного количества значащих цифр.
- Записать результат измерений в виде  $\bar{R} \pm \Delta R$   $\text{м}^{-1}$

## **Контрольные вопросы**

1. При каких условиях возникают линейчатые спектры?
2. Какова модель атома по теории Резерфорда-Бора? Сформулируйте постулаты Бора.
3. Получите выражения для радиусов стационарных орбит электрона в водородоподобном ионе на основе теории Бора
4. Получите выражения для скоростей электрона на стационарных орбитах в водородоподобном ионе на основе теории Бора.
5. Выведите на основе теории Бора формулу для энергии электрона на  $n$ -ой орбите. Объясните смысл отрицательного значения энергии электрона в атоме.
6. Выведите формулу для константы Ридберга на основе теории Бора.
7. Каковы трудности теории Бора?
8. Объясните устройство монохроматора
9. Как производится градуировка монохроматора?
10. Что такое  $\Psi$ -функция и каков ее статистический смысл?
11. Объясните, как происходит квантование момента импульса в квантовой механике. Сравните его с квантованием по Бору.
12. Напишите уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода. От каких квантовых чисел зависит решение этого уравнения? Каков их смысл?
13. Какую скорость приобретет первоначально покидающийся атом водорода при испускании фотона, соответствующего головной линии: 1) серии Лаймана, 2) серии Бальмера?
14. Напишите выражение для магнетона Бора. Что это за величина? В каких единицах в СИ она измеряется?

## **Литература**

Савельев И.В. Курс общей физики Т. 3