ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение

Основной задачей экспериментальной физики является количественное исследование физических явлений, в процессе которого определяются числовые значения физических величин и, в конечном итоге, устанавливаются законы исследуемых явлений.

Количественные исследования состоят из двух последовательных этапов:

1) измерение физических величин,
2) вычисления, выполняемые по окончанию измерений, т.е. математическая обработка результатов измерений.

Точность измерения является всегда ограниченной, и результат измерений дает лишь приближенное значение измеряемой величины. Это обусловлено неточностью измерительных приборов, неполнотой наших знаний об исследуемом явлении, трудностью учета всех побочных факторов, влияющих на измерения. Таким образом, любые измерения производятся с какими-либо погрешностями (*ошибками*).

Погрешности, возникающие при измерениях, делят по закономерности их появлений на систематические, случайные и промахи (*грубые ошибки*).

Систематическая погрешность является либо постоянной, либо изменяется по какому-либо закону в процессе измерений. Причинами появления таких погрешностей могут быть: смещение нулевого отсчета прибора; неточная градуировка прибора; некорректная методика проведения эксперимента (не учитываются, например, температурные поправки, влажность, наличие магнитного поля и пр.); использование при расчетах приближенных формул, что может привести к систематическому завышению или занижению результатов измерении.

Выявить систематические погрешности можно только экспериментально: в результате тщательной отладки используемых приборов, их дополнительной проверки с использованием эталонов, учета постоянно действующих факторов, критического анализа методики проведения измерений, использования различных методик для определения одной и той же величины.

Если систематическая погрешность выявлена, то она учитывается при измерениях и называется в этом случае поправкой.

Промахи – это ошибки, связанные с резким нарушением условий эксперимента при отдельных измерениях. Сюда относятся ошибки, связанные с неисправностью прибора, грубым просчетом экспериментатора, посторонним вмешательством. Грубая ошибка присутствует обычно не более чем в одном – двух измерениях и характерна своим резким отличием по величине от прочих погрешностей других измерений. Для обнаружения грубых ошибок существуют специальные критерии (см. Оглавление).

Случайными погрешностями называют погрешности, возникающие по многим причинам, действующим в каждом отдельном измерении различным образом. Они могут быть связаны с трением и зазорами в измерительных устройствах, с влиянием внешних условий (вибрацией, колебаниями температуры, влажности и др.), с несовершенством наших органов чувств (например, с параллаксом, см. рис. 1).

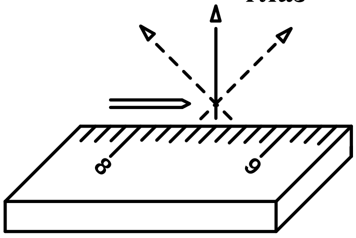

Рис. 1. Линия наблюдения должна быть перпендикулярна шкале.

Случайные погрешности всегда присутствуют в эксперименте, они изменяются от одного измерения к другому, и не могут быть определены заранее. Случайные погрешности служат причиной разброса результатов повторных измерений относительно истинного значения измеряемой величины.

Если систематические погрешности в принципе могут быть выявлены и учтены (хотя это может оказаться очень сложной задачей), то исключить случайные погрешности нельзя. Но именно потому, что они случайные они поддаются обработке с помощью математической статистики, основанной на теории вероятности. Используя методы математической статистики, мы можем оценить, насколько близок полученный результат к истинному значению измеряемой величины.

Математическая обработка результатов измерений при наличии только случайных ошибок

Допустим, что мы проводим серию из n измерений одной и той же физической величины. Предполагается, что измерения проводятся одним и тем же наблюдателем с помощью одного и того же прибора. Будем считать, что систематические погрешности отсутствуют, промахи также исключены. В результате мы получим ряд чисел: x_1, x_2, … x_n, при этом возможны и повторяющиеся числа. Если число измерений достаточно велико, то на каждый интервал $(x,\ x + \Delta x)$ будет приходиться некоторая доля отсчетов. Графически это можно представить в виде *гистограммы* – столбчатой диаграммы, показанной на рис. 2.

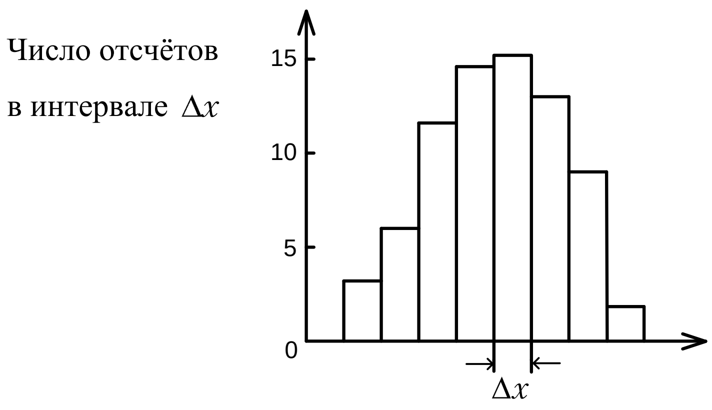

Рис. 2. Гистограмма.

При очень большом числе измерений $(n \to \infty)$ ширину интервала Δx можно взять бесконечно малой: $\Delta x \to dx$ Тогда вместо гистограммы можно построить график в виде гладкой кривой (рис. 3).

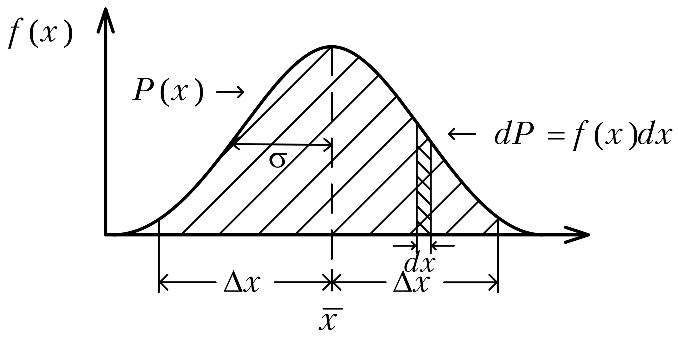

Рис. 3. Распределение случайной величины.

Здесь по оси ординат отложена функция $f(x)$, называемая *плотностью вероятности распределения случайной величины* x. Выясним смысл $f(x)$.

Пусть P – вероятность. Тогда:

$dP = f(x) \cdot dx$ – вероятность того, что результат отдельного измерения окажется в интервале $(x, x + dx)$;

$f(x) = \dfrac{dP}{dx}$ – вероятность того, что результат отдельного измерения окажется в интервале $(x, x + dx)$, но уже в расчете на единичный интервал dx;

$P(x) = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x) \cdot dx$ – вероятность того, что результат отдельного измерения попадет в интервал $(x - \Delta x, x + \Delta x)$.

На рис. 3: dP равна площади плотно заштрихованного участка, а P – всей заштрихованной площади.

Строго говоря, вид функции заранее неизвестен, но во многих случаях кривая распределения случайных величин, приведенная на рис. 3, математически описывается уравнением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Это выражение называют *законом Гаусса*, а само распределение случайных величин в этом случае называют *нормальным или гауссовым распределением*. Здесь: x_i значение i-го измерения величины x; $\bar{x}$ – среднее значение; σ – *среднее квадратичное отклонение* (или *средняя квадратичная погрешность*) *отдельного измерения*.

Кривая нормального распределения $f(x)$ является симметричной и характеризуется двумя параметрами: средним значением $\bar{x}$ и средним квадратичным отклонением σ. Кривая имеет перегибы в точках $x = \bar{x} + \sigma$.

Вместо величины σ часто используют σ^2, называемую дисперсией. Дисперсия σ^2 (и средняя квадратичная погрешность σ) характеризуют разброс значений, полученный при измерении данной величины x. Чем меньше σ, т.е. ширина гауссовой кривой, тем меньше разброс значений (рис. 4).

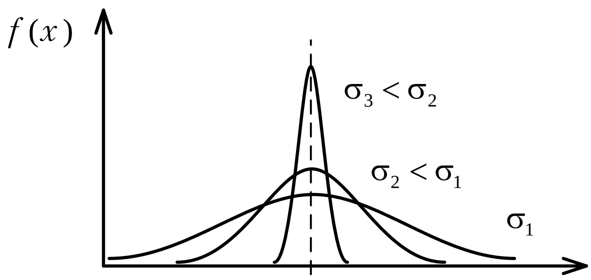

Рис. 4. Распределение случайной величины при различной дисперсии.

Рассмотрим теперь, как оценить результат измерений какой-либо величины. Пусть мы получили n значений для величины x. За наилучшее приближение к истинному значению измеряемой величины x принимается среднее арифметическое из всех имеющихся чисел:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i) \qquad (1)$$

Среднее значение не является истинным значением измеряемой величины x, это только приближение к нему. При большом разбросе данных и малом числе измерений x может существенно отличаться от истинного значения. Для того чтобы оценить степень приближения среднего значения к истинному, используется величина, называемая *доверительным интервалом* – интервалом значений измеряемой физической величины, в который попадает ее истинное значение, но не точно, а с некоторой вероятностью α. Эту вероятность α называют *доверительной вероятностью* или *надежностью*. Пусть Δx – полуширина доверительного интервала, тогда $(\bar{x} - \Delta x)$ будет нижней границей доверительного интервала, а $(\bar{x} + \Delta x)$ – его верхней границей.

Таким образом, результат измерений некоторой величины x можно записать в виде:

$x = \bar{x} \pm \Delta x$ с надежностью α = ... %

Такую запись следует понимать так:
истинное значение измеряемой величины x лежит в пределах
от $(\bar{x} - \Delta x)$ до $(\bar{x} + \Delta x)$ с вероятностью α.

Гауссово распределение выполняется при очень большом числе измерений (теоретически при $n \to \infty$). При малом числе измерений ($n \le 30$) полуширина доверительного интервала определяется по формуле:

$$\Delta x_{\text{случ}} = t(\alpha, n) \cdot \sigma, \qquad (2)$$

где $t(\alpha, n)$ – *коэффициент Стьюдента*, зависящий от надежности α и числа измерений n, а σ – *средняя квадратичная погрешность результата* n измерений, называемая также погрешностью среднего арифметического и определяемая из выражения:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad (3)$$

Разности между отдельными измерениями x_i и средним $\bar{x}$:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \qquad (4)$$

называются *абсолютными погрешностями отдельных измерений*.

Коэффициент Стьюдента $t(\alpha, n)$ определяется по специальным таблицам при известном числе измерений n. В таблице 1 приведены коэффициенты $t(\alpha, n)$ при некоторых значениях n и α.

При всех измерениях в лабораторном практикуме рекомендуется задавать надежность $\alpha = 0{,}95\,(95\%)$. Более высокая надежность 0,99 или 0,999 требуется только при очень точных и ответственных экспериментах.

Таблица 1. Коэффициенты Стьюдента $t(\alpha, n)$
при различном числе измерений n и различной надежности α.

Число измерений n	Надежность α			
	0,90	0,95	0,99	0,999
2	6,3	12,7	63,7	636,6
3	2,9	4,3	9,9	31,6
4	2,4	3,2	5,8	12,9
5	2,1	2,8.	4,6	8,6
6	2,0	2,6	4,0	6,9
7	1,9	2,4	3,7	6,0
8	1,9	2,4	3,5	5,4
9	1,9	2,3	3,4	5,0
10	1,8	2,3	3,3	4,8
∞	1,6	1,96	2,6	3,3

В тех случаях, когда требуется сравнить точность измерений двух или нескольких однородных (например, длин двух предметов) или разнородных (например, массы тела и его длины), используют безразмерную величину, называемую относительной погрешностью результата измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot (100\%) \qquad (5)$$

Приборная погрешность измерительных инструментов.

Обозначим *погрешность измерительного инструмента* – δ.

Измерения с помощью линейки.

Если при повторных измерениях всякий раз получается одно и то же значение, а цена деления линейки l, то *абсолютная приборная погрешность* δ в этом случае будет равна: $\sigma = \frac{l}{2}$. Результат следует записать в виде:

$$x = x_{\text{измер}} \pm \delta = x_{\text{измер}} \pm \frac{l}{2}.$$

Приборы с цифровыми показаниями.

К таким приборам должна прилагаться специальная инструкция, в которой указывается, как должны рассчитываться погрешности, формулы для расчетов довольно сложные. Если такой инструкции нет, целесообразно в качестве абсолютной погрешности прибора δ принять единицу последнего разряда в показаниях. Например, прибор показывает 4,5, тогда результат следует записать в виде: 4,5 ± 0,1.

Стрелочные приборы по точности делят на классы. Например, электроизмерительные приборы бывают 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5 ,... классов. Эти цифры указываются вблизи шкалы прибора и означают относительную погрешность прибора в %. Абсолютная погрешность при этом будет одинаковой при любых показаниях прибора, ее рассчитывают, умножая максимальное деление шкалы на класс прибора. Например, прибор рассчитан на 200 мА класс 1,0. Абсолютная погрешность δ составит: $200 \times 0{,}01$ =2 мА. Пусть прибор показывает 46 мА. Результат запишем в виде: I = (46 ± 2) мА.

Штангенциркуль имеет основную миллиметровую шкалу и небольшую подвижную шкалу, называемую нониусом. Определим точность шкалы нониуса. Пусть на нониусе нанесено n делений. Совместим нулевое деление нониуса с некоторым делением основной шкалы и посмотрим, с каким делением основной шкалы совпадет последнее деление нониуса. Таким образом, n делений нониуса совпадают с m делениями шкалы (в миллиметрах): $n \cdot L_{\text{н}} = m \cdot L_{\text{лин}}$, где $L_{\text{н}}$ – цена деления нониуса, а $L_{\text{лин}}$ – цена деления линейки (в миллиметрах). Точностью (*приборной погрешностью*) нониуса называют величину:

$$\delta = L_{\text{лин}} - L_{\text{н}} = \frac{(n-m)}{n} L_{\text{лин}} .$$

Деления шкалы нониуса для удобства отсчета оцифрованы, обычно это доли миллиметра.

Микрометр имеет линейную шкалу, разделенную в нижней своей части на миллиметры и в верхней части тоже на миллиметры, но со сдвигом 0,5 мм. Чтобы определить цену деления круговой шкалы, нужно поворотом барабана сделать полный оборот и посмотреть, насколько при этом сместится край барабана по линейной шкале. Обычно смешение равно 0,5 мм. Если на круговой шкале 50 делений, то цена деления барабана 0,5:50 = 0,01 мм.

Прямые и косвенные измерения. Обработка результатов.

Измерения различных физических величин делят по способу получения их значений на прямые и косвенные. *Прямые измерения* дают непосредственно значения исследуемой величины, которые могут быть отсчитаны на шкале прибора. *При косвенных измерениях* исследуемая величина не может быть получена непосредственно, а находится путем расчетов по результатам измерений других величин. Рассмотрим различные случаи оценки погрешностей и записи полученных результатов.

а) Прямые измерения.

Суммарная погрешность результата измерений складывается из случайной погрешности $\Delta x_{\text{случ}}$, и приборной погрешности δ.

Для нахождения $\Delta x_{\text{случ}}$ следует:

1) Произвести n измерений некоторой величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

2) Найти среднее арифметическое значение $\overline{x}$ по формуле (1).

Внимание! При обработке результатов измерений следует учитывать **все** полученные числа, независимо от их повторяемости

3) Найти *модули* разности между отдельными измерениями и средним значением по формуле (4) и вычислить квадраты этих значений.

4) Вычислить по формуле (3) среднюю квадратичную погрешность результата измерений σ.

5) Вычислить полуширину доверительного интервала $\Delta x_{\text{случ}}$ по формуле (2),

приняв надежность α = 0,95 (95 %). Коэффициент Стьюдента $t(\alpha, n)$ найти по таблице 1.

6) Определить приборную погрешность δ.

7) Представить результаты в виде:

№ по порядку	X_i, мм	$\lvert X_i - \overline{X} \rvert$, мм	$(X_i - \overline{X})^2$, 10^{-4} мм^2
1			
2			
3			
4			
5			

$\overline{x} = \ldots$	$\Delta x_{\text{случ}} = \ldots$	$\delta_{\text{приб}} = \ldots$
$x = \overline{x} \pm \Delta x_{\text{суммар}} = \ldots \pm \ldots$		

В литературе не существует единого мнения о том, как учитывать в совокупности случайные $\Delta x_{\text{случ}}$ и систематические δ погрешности (мы будем под систематической погрешностью понимать приборную погрешность).

Предлагаются следующие варианты:

1) Складывать их арифметически: $\Delta x = \Delta x_{\text{случ}} + \delta$ (дает завышенную оценку).
2) Складывать их квадраты: $(\Delta x)^2 = (\Delta x_{\text{случ}})^2 + (\delta)^2$ (дает заниженную оценку).
3) Складывать квадраты, но вводить некоторый числовой коэффициент к δ: 2/3, $1/2\sqrt{3}$ и др. (см. лит. 3).
4) Записывать погрешность в виде: $\Delta x = \delta + 2\sigma$ (см. лит. 2).
5) Представлять случайную и систематическую погрешности раздельно (см. лит. 4).

В лабораторном практикуме мы будем использовать второй способ, т.е. определять *суммарную погрешность* по формуле:

$$\Delta x_{\text{суммар}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{случ}})^2 + (\delta)^2} \tag{6}$$

б) Косвенные измерения

Пусть некоторая физическая величина y является функцией нескольких других физических величин a, b, c ...: $y = f(a, b, c)$. При этом средние значения величин $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, их абсолютные и относительные погрешности могут быть найдены из прямых измерений. Среднее значение $\bar{y}$ вычисляется путем подстановки средних значений $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$,..., т.е. $\bar{y} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Абсолютная погрешность Δy определяется по выражению:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c\right)^2}\,. \tag{7}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ вычисляется как производная по переменной в предположении, что все остальные переменные b, c,... являются постоянными величинами (в качестве постоянных в теории ошибок выбирают средние значения величин). Аналогично для других переменных.

В частном случае, когда функция $f(x)$ содержит $a, b, c, \ldots$ в виде сомножителей (в первой или более высоких степенях, например, $y = a^2 \cdot b^3$) вычисления абсолютной погрешности существенно упрощаются. В этом случае следует сначала прологарифмировать функцию *y=f(a,b,c,…)*, затем продифференцировать и в результате получим общую формулу для вычисления *относительной погрешности***:**

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial c}\Delta c\right)^2 + \ldots}$$

*Пример***.** Пусть требуется определить объем цилиндра, измеряя его диаметр и высоту. Объем цилиндра: $V = (\pi \cdot D^2 \cdot h)/4$, где D – диаметр, h – высота. Логарифмируем: $\ln V = \ln \pi + 2\ln D + \ln h - \ln 4$. Находим частные производные: $\frac{\partial \ln V}{\partial \pi} = \frac{1}{\bar{\pi}}$, $\frac{\partial \ln V}{\partial D} = \frac{2}{\bar{D}}$, $\frac{\partial \ln V}{\partial h} = \frac{1}{\bar{h}}$. То есть относительную погрешность вычисления объема можно найти по формуле:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta V}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \pi}{\bar{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta D}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2} = \sqrt{4\varepsilon_D^2 + \varepsilon_h^2}\,,$$

где ε_D и ε_h – относительные погрешности измерений диаметра и высоты, определяемые из прямых измерений этих величин. Погрешностью в выборе значений числа π можно пренебречь, если выбрать π с достаточным количеством значащих цифр (см. ниже – раздел "Выбор числа π").

Для некоторых простых функций в таблице 2 приведены формулы для вычисления абсолютных и относительных погрешностей результата измерений некоторых величин *y*.

Таблица 2. Формулы погрешностей для некоторых функций

Вид функции y	Абсолютная погрешность Δy	Относительная погрешность $\varepsilon = \Delta y / \bar{y}$
$y = a + b$ $y = a - b$	$\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$	$(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2})/(\bar{a} \pm \bar{b})$
$y = a \cdot b$	$\sqrt{(\bar{b} \cdot \Delta a)^2 + (\bar{a} \cdot \Delta b)^2}$	$\sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$
$y = a / b$	$y\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot \Delta b}{\bar{b}^2}\right)^2}$	$\sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}$
$y = a^k b^m c^r$ $k, m, r,$ – целые числа	$y\sqrt{\left(k\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(r\frac{\Delta c}{c}\right)^2}$	$\sqrt{(k \cdot \varepsilon_f)^2 + (m \cdot \varepsilon_b)^2 + (r \cdot \varepsilon_c)^2}$

Пользуясь этими формулами или общей формулой (7) можно вычислить сначала ε_y, а затем Δy или наоборот: $\Delta y = \varepsilon_y \cdot \bar{y}$. Результат косвенных измерений величины y записывается в виде:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y\ ,\ \varepsilon_y = \ldots\ \%$$

Выбор числа π : = 3,1415926…

В некоторые формулы, выражающие функциональные связи между физическими величинами, входит приближенное число π. При этом возникает вопрос, с каким количеством значащих цифр следует взять π при вычислениях. Ответ: с таким, чтобы погрешность при его округлении была на порядок (т.е. в 10 раз) меньше суммарной погрешности измерения остальных величин, входящих в данное выражение (формулу). Так как в формуле (7) суммируются квадраты погрешностей, то следует сравнивать не относительную погрешность при округлении π (ε_π), а квадрат этой величины – $(\varepsilon_\pi)^2$.

Пример. Пусть имеется степенная функция вида: $y = \pi^p \cdot a^k \cdot b^m \cdot c^r$, где π, a, b, c - переменные величины, а показатели степеней – заданные точно числа. Из таблицы 2 находим: $\varepsilon_y = \sqrt{(p\varepsilon_y)^2 + (k\varepsilon_a)^2 + (m\varepsilon_b)^2 + (r\varepsilon_c)^2}$. Чтобы погрешность в округлении π не влияла на ε_y, следует член $(p\varepsilon_\pi)^2$ взять в 100 раз меньше, чем сумма остальных погрешностей: $\varepsilon_\pi^2 = (p\varepsilon_\pi)^2 = [(k\varepsilon_a)^2 + (m\varepsilon_b)^2 + (r\varepsilon_c)^2]/100$. Вычислив по этой формуле ε_π^2, можно выбрать π, пользуясь таблицей:

ε_π^2	π	ε_π
$\geq 2{,}0 \cdot 10^{-3}$	3	$\geq 4{,}5$
$1{,}7 \cdot 10^{-4} - 2{,}0 \cdot 10^{-3}$	3,1	1,3-4,5
$2{,}5 \cdot 10^{-7} - 1{,}7 \cdot 10^{-4}$	3,14	0,05-1,3
$1{,}7 \cdot 10^{-8} - 2{,}5 \cdot 10^{-7}$	3,142	0,013-0,05

Точность вычислений. Форма записи результатов

Точность вычислений при математической обработке результатов измерений должна соответствовать точности самих измерений. Вычисления с большим, чем это не обходимо, количеством десятичных знаков не только приводят к лишней затрате труда, но, самое главное, создают ложное впечатление о большой точности результата, которой в действительности нет.

Значащие цифры в приближённых вычислениях – все *цифры* числа, начиная с первой слева, отличной от нуля, до последней, за правильность которой можно ручаться.

Погрешности следует вычислять с двумя значащими цифрами, а записывать с одной значащей цифрой, но если первая цифра 1 или 2, нужно указать вторую значащую цифру.

Ненаучное, но верное **правило определения количества значащих цифр**: «Идем по числу слева направо, первая цифра, отличная от 0 и все цифры справа от нее, включая 0, являются значащими". Например, в числе 0,001 – одна, в числе 0,0010– две, в числе 0.00100 – три значащих цифры.

В величине $\bar{x}$ оставляют столько значащих цифр, чтобы последняя значащая цифра в $\bar{x}$ соответствовала последней значащей цифре в погрешности результата. Например, если последняя значащая цифра в погрешности – сотая доля числа, то и результат следует записать до сотых долей.

Ниже приводятся числовые примеры записи результатов некоторых гипотетических измерений.

Δx , м	ε, %	Δx , м	$x = (\bar{x} + \Delta x)$, м
$8743{,}24 = 8{,}74324 \cdot 10^3$	0,10	9	(8743 ± 9)
	0,20	17	(8743 + 17)
	0,50	$44 \cong 0{,}04 \cdot 10^3$	$(8{,}74 \pm 0{,}04) \cdot 10^3$
	1,0	$87 \cong 0{,}09 \cdot 10^3$	$(8{,}74 \pm 0{,}09) \cdot 10^3$
	2,0	$170 \cong 0{,}17 \cdot 10^3$	$(8{,}74 \pm 0{,}17) \cdot 10^3$
	3	$260 \cong 0{,}26 \cdot 10^3$	$(8{,}74 \pm 0{,}26) \cdot 10^3$
	5	$440 \cong 0{,}4 \cdot 10^3$	$(8{,}7 \pm 0{,}4) \cdot 10^3$
	10	$870 \cong 0{,}9 \cdot 10^3$	$(8{,}7 \pm 0{,}9) \cdot 10^3$
	20	$1700 \cong 1{,}7 \cdot 10^3$	$(8{,}7 \pm 1{,}7) \cdot 10^3$
	50	$4400 \cong 4 \cdot 10^3$	$(8 \pm 4) \cdot 10^3$

Округление чисел.

1) Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, она просто отбрасывается, если больше 5, то последняя цифра увеличивается на единицу.

2) Если отбрасываемая цифра равна 5, а за ней нет значащих цифр, то округление производится до ближайшего четного числа, т.е. последняя сохраняемая цифра остается

неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная. Например, 0,865 округляется до 0,86, а 0,835 до 0,84.

Различные формы записи полученных результатов. В тех случаях, когда имеют дело с очень малыми (или очень большими) величинами, их записывают в различной форме. Например, при вычислении погрешностей Δx^2 были получены величины: 2, 9, 4 $мм^2$. Если требуется выразить эти величины в метрах, то записать результат можно по-разному:

Δx^2, м^2	Δx^2, м^2	$\Delta x^2 \cdot 10^6$, м^2	$\Delta x^2, 10^6$ м^2
0,000002	$2 \cdot 10^{-6}$	2	2
0,000009	$9 \cdot 10^{-6}$	9	9
0,000002	$4 \cdot 10^{-6}$	4	4
плохо, слишком много нулей.	плохо, повторяются одни и те же громоздкие числа	не очень удобно, т.к. даны не Δx, а $\Delta x \cdot 10^6$	наиболее рациональная форма записи

Таким образом, наиболее рациональной формой записи является та, которая приведена в последнем столбце, хотя в справочниках, учебниках, научной литературе встречаются и остальные формы записи.

Построение графиков

Выбор размера графика определяется теми целями, которые хотят достичь построением графика. Если мы хотим использовать график только для наглядного представления зависимости $y = f(x)$, то достаточно иметь график в тетрадный лист. Если с помощью графика в дальнейшем будут определяться какие-либо дополнительные величины (наклон прямой, отрезки на осях координат), то общий размер графика может быть и большим. При этом нужно помнить, однако, что большой точности при этом достичь нельзя. Большая точность может быть достигнута только при специальной математической обработке результатов измерений.

При построении графика на миллиметровой бумаге масштаб следует выбирать таким образом, чтобы 1 мм на бумаге равнялся величине, несколько меньшей, чем погрешности Δx и Δy. Например, если $\Delta x = 0{,}3$ с, то можно взять 1 мм = 0,1 с или 0,2 с.

Начало отсчета по координатным осям не обязательно должно совпадать с нулевыми делениями. Это зависит от того, какой диапазон величин x и y нас интересует. Если по одной из осей отсчет начинается не с 0, то это начальное деление должно быть оцифровано, желательно круглым числом (см. рис. 5). При выборе начала отсчета следует руководствоваться здравым смыслом. Например, при оптических исследованиях в видимом диапазоне спектра бессмысленно начинать шкалу длин волн с 0, т. к. глаз видит свет только в диапазоне 400 – 700 нм.

Последовательность действий при построении графиков в лабораторном практикуме:

1) На миллиметровой бумаге размером примерно в тетрадный лист проводятся оси координат, указываются буквенные обозначения величин и единицы измерения (рис. 5).

2) Выбираются предельные масштабные деления по осям x и y так, чтобы они несколько превышали максимальные значения этих величин, полученные при измерениях. Например, пусть $x_{\max} = 93{,}8$, а $y_{\max} = 369$. Тогда по оси x предельное значение берем 100, а по оси y – 400. Длины отрезков 0 – 100 и 0 – 400 (в миллиметрах на бумаге) должны быть примерно одинаковы.

3) Отрезки 0 – 100 и 0 – 400 разбиваются на равные интервалы и вблизи отмеченных делений указываются масштабные числа.

Внимание! На осях координат не следует откладывать значения величин x и y, полученные при измерениях.

4) На график наносятся точки, соответствующие измеренным значениям x и y.

5) Через полученные точки проводится гладкая линия так, чтобы точки оказались слева и справа от нее, причем отклонения (в перпендикулярном направлении от линии) в сумме слева и справа должны быть примерно одинаковы. При строгой математической обработке добиваются того, чтобы разность $(\sum \xi^2_{\text{слева}} - \sum \xi^2_{\text{справа}}) \to 0$ (ξ – отклонения).

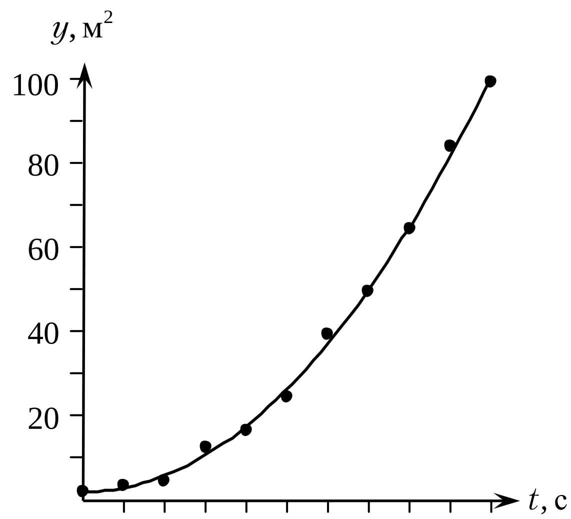

Рис. 5. Построение графика.

Нельзя соединять полученные точки между собой в виде ломаной линии. Физические процессы в подавляющем своем большинстве происходят "гладко" исключения составляют флуктуации, шумы в радиотехнической аппаратуре и т.п. Кроме того, следует помнить, что точка на графике не является истинным значением измеряемой величины, она "окружена" областью погрешностей (см. рис. 5).

Выявление промахов

1) Если число измерений $n < 4$, то выявлять промахи не следует.

2) При $n > 6$ ($n \leq 100$) полученное при измерении значение x_i является промахом, если $\frac{|x_i - \bar{x}|}{\sigma} \geq 4$, где $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ – средняя квадратичная погрешность одного измерения (не путать со средней квадратичной погрешностью результата измерений, см. формулу (3)). При этом σ и $\bar{x}$ вычисляются без использования того измерения, которое проверяется на промах.

Контрольные вопросы

1) Какие погрешности называются случайными? Систематическими? Промахами? Что такое прямые и косвенные измерения?
2) Нарисуйте график нормального распределения случайных величин. Какой плотность вероятности распределения случайной величины? Что она представляет собой на графике?
3) Что называют дисперсией? Что она характеризует? Нарисуйте ряд кривых нормального распределения при различных дисперсиях.
4) Что называют доверительным интервалом и доверительной вероятностью (надежностью)? Как следует понимать запись результата измерений в виде: $x = \bar{x} \pm \Delta x$? Является ли среднее арифметическое значение истинным значением данной величины?
5) Напишите формулы для вычисления средней квадратичной погрешности результат измерений; для доверительного интервала с учетом коэффициента Стьюдента. От каких величин зависит этот коэффициент?
6) Напишите для относительной погрешности результата серии измерений. Для чего вводятся относительные погрешности?

7) Расскажите, в какой последовательности производится обработка результатов прямых измерений.
8) С каким числом значащих цифр записывается погрешность результата измерений и сам результат?
9) Как производится обработка результатов косвенных измерений? Напишите общее выражение для вычисления относительной и абсолютной погрешностей при косвенных измерениях.
10) Как определяется число значащих цифр в числе π?

Литература

1. *Агекян Т.А*. Основы теории ошибок для астрономов и физиков.
2. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин.
3. *Касандрова О.И*., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений.
4. *Кэмпион П.Дж*. Практическое руководство по представлению результатов измерений.
5. *Тейлор Дж*. Ведение в теорию ошибок.